Аналитическая геометрия

А.Я.Казаков, А.А.Жихарева

1 Оглавление

2 Введение

Основная мотивировка аналитической геометрии - попытаться перевести геометрические объекты в аналитическую форму и исследовать геометрические вопросы с помощью аналитических средств (например, инструментов математического анализа). В данном курсе, как и предполагается в базовом курсе вузовской математики, эта программа проведена не слишком далеко - она останавливается, по существу, на изучении простейших геометрических объектов, таких как прямые, плоскости, кривые второго порядка на плоскости. В основном этот курс знакомит студента с аналитическим описанием этих начальных геометрических объектов, иллюстрируя на их примере возможности аналитического описания и математического анализа соответствующих геометрических задач. Эти задачи также дают возможность продемонстрировать приложения векторного подхода к геометрии, так что курс аналитической геометрии тесно связан с курсом линейной алгебры.

Имеется много хороших учебников и задачников по аналитической геометрии. Мы приведем здесь только несколько ссылок, дополнительную литературу нетрудно найти в Интернете.

Учебники:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

Задачники:

1. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.

2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1.

3 Векторное исчисление

3.1 Векторное пространство

В данном разделе обсуждается понятие векторного (иногда его называют линейным) пространства. Основные определения были даны в курсе линейной алгебре и здесь мы вкратце повторим их, имея в виду приложения в аналитической геометрии.

Определение. Множество $\mathfrak{L}$ называется **векторным пространством**, а его элементы $\mathbf{u} \in \mathfrak{L}$ **- векторами**, если для его элементов заданы 2 операции: сложение элементов (обозначается знаком $+$) и умножение элемента на вещественные числа $c \in \mathbb{R}$, так что справедливы следующие соотношения, которые выполняются для всех элементов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathfrak{L}$ и любых чисел c, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$,

2. $\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3$,

3. $c(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = c\mathbf{u}_1 + c\mathbf{u}_2$,

4. $c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}$,

5. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

6. Существует нулевой элемент $\mathbf{0} \in \mathfrak{L}$ такой, что $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}, 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Пример. Рассмотрим множество $n-$столбцов. Это частный случай матриц, так что в качестве операций мы используем матричные операции сложения и умножения на число. Можно проверить, что выполняются все описанные выше свойства операций, если в качестве нулевого элемента взять нулевой столбец - столбец, все элементы которого равны 0.

Пример. Рассмотрим множество матриц типа (m, n). В качестве операций мы используем матричные операции сложения и умножения на число. Можно проверить, что выполняются все описанные выше свойства операций, если в качестве нулевого элемента взять нулевую матрицу - матрицу типа (m, n), все элементы которой равны 0.

В курсе линейной алгебры были даны определения линейной зависимости и линейной независимости векторов, базиса векторного пространства, координат вектора в заданном базисе, линейных операторов, скалярного произведения векторов и выражения этих объектов при фиксированном базисе. В аналитической геометрии обычно обсуждают 2 или 3 -мерные векторные пространства, так что векторами можно считать 2-столбцы или 3-столбцы соответственно (их следует писать в виде столбцов, по типографским соображениям их записывают в виде $(x,\, y)^T$ или $(x,\, y,\, z)^T$ соответственно). Числа $x,\, y,\, z$ - вещественные, они называются координатами вектора. Такое вещественное пространство обозначают R^2 (соответственно, R^3). В качестве стандартного базиса 3-мерного векторного пространства полагают набор векторов $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$, причем вектора эти имеют единичную длину и ортогональны друг другу (в 2-мерном случае в качестве базиса выбирают первые два вектора). Соответственно, эти вектора полагаются направляющими векторами осей $x,\, y,\, z$, так что вектора записываются тройками (парами) чисел $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (x,\, y,\, z)^T$, $\mathbf{i} = (1,\, 0,\, 0)^T$, $\mathbf{j} = (0,\, 1,\, 0)^T$, $\mathbf{k} = (0,\, 0,\, 1)^T$. 2-мерное пространство можно считать подпространством 3-мерного, а именно, его составляют вектора, для которых $z = 0$.

Векторному пространству R^3 можно сопоставить некоторое множество точек (которое также называют трехмерным пространством). Фиксируем в этом множестве точку (назовем ее началом координат, точкой O), выпустим из этой точки три оси, перпендикулярные друг другу (назовем их осями $x,\, y\, z$) и отложим вдоль первой оси число x, вдоль второй - число y, вдоль третьей - число z. Точку M, которая будет иметь эти координаты, мы сопоставим вектору $(x,\, y,\, z)^T$. На "геометрическом"языке мы "приложили"к точке O вектор $\mathbf{r} = (x,\, y,\, z)^T$, так что конец этого вектора находится в точке M. Этим соответствием между векторами и точками мы будем часто пользоваться в дальнейшем, переходя с языка "точек"на язык векторов и обратно. Это соответствие можно продолжить, сопоставляя паре точек $M = (x_1, y_1, z_1)$ и $N = (x_2, y_2, z_2)$ вектор $\mathbf{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T$ - который начинается в точке M и заканчивается в точке N, выражаясь в "школьных"терминах.

Контрольный вопрос. Когда набор векторов называется линейно независимым?

Решение типовых задач.

Задача 1. Заданы векторы $\mathbf{a} = 2i + 3j$, $\mathbf{b} = -3j - 2k, \mathbf{c} = i + j - k$. Найти координаты вектора $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Решение.

$\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c} = (2i+3j) - \frac{1}{2}(-3j-2k) + (i+j-k) = (2i+i) + (3j+\frac{3}{2}j+j) + (k-k) = 3i+5.5j$

Таким образом, искомый вектор имеет координаты $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c} = (3, 5.5, 0)^T$

Задача 2. Даны вектора $\mathbf{a} = (3, -2)^T, \mathbf{b} = (-2, 1)^T, \mathbf{c} = (7, -4)^T$. Разложить $\mathbf{a}$ по базису векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Решение.

Мы ищем разложение $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} = (-2\alpha + 7\beta, \alpha - 4\beta)^T$, коэффициенты α, β подлежат определению. Сравнивая первую и вторую компоненты, получаем систему уравнений $-2\alpha + 7\beta = 3$, $\alpha - 4\beta = -2$. Решая эту систему, находим: $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Задачи.

1. Заданы векторы $\mathbf{a} = 2i - j, \mathbf{b} = 3j - k, \mathbf{c} = i + 3j - 2k$. Найти координаты вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$.

2. Даны вектора $\mathbf{a} = (3, -1)^T$, $\mathbf{b} = (1, -2)^T$, $\mathbf{c} = (-1, 7)^T$. Разложить вектор $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ по базису векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

3. Даны вектора $\mathbf{a} = (2, 1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (1, -1, 2)^T$, $\mathbf{c} = (2, 2, -1)^T$, $\mathbf{d} = (3, 7, -7)^T$. Разложить вектор $\mathbf{d}$ по векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

4. AD, BE и CF - медианы треугольника ABC. Доказать, что сумма этих векторов равна нулю.

3.2 Скалярное произведение

Скалярное (стандартное) произведение двух векторов задается соотношением $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Длина вектора $\mathbf{r}$ определяется выражением $|\mathbf{r}| = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Угол между векторами $\mathbf{r}_1 = (x_1,\, y_1,\, z_1)^T$, $\mathbf{r}_2 = (x_2,\, y_2,\, z_2)^T$ определяется соотношением

$$\cos\phi = \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1|\cdot|\mathbf{r}_2|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,.$$

Напомним **основные свойства скалярного произведения.**

1. Симметричность, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

2. Линейность по обоим сомножителям: $(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v})+(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ для любых чисел λ и любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1$, то же для второго сомножителя.

3. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, причем $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

4. Неравенство Коши-Буняковского: $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Пример. Вычислим скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a} = (2,\, 3,\, 4)^T$, $\mathbf{b} = (-1,\, 1,\, -1)^T$. Согласно нашим формулам имеем: $(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = 2\cdot(-1)+3\cdot 1+4\cdot(-1) = -2+3-4 = -3$.

Контрольный вопрос. Проверьте линейность стандартного скалярного произведения.

Решение типовых задач.

Задача 1. Даны вектора $\mathbf{a} = (m, 3, 4)^T$, $\quad \mathbf{b} = (4, m, -7)^T$. При каком значении m эти вектора перпендикулярны?

Решение.

Найдем скалярное произведение этих векторов: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4m+3m-28 = 7m-28$.

Поскольку эти вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. $7m-28 = 0$. Отсюда имеем $m = 4$.

Задача 2. Какой угол образуют единичные вектора $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, если известно, что $\mathbf{a} = \mathbf{p}+2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{p}-4\mathbf{q}$ взаимно перпенидикулярны.

Решение.

Найдем скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, воспользовавшись свойствами скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{p}+2\mathbf{q}, 5\mathbf{p}-4\mathbf{q}) = (\mathbf{p}, 5\mathbf{p})+(2\mathbf{q}, 5\mathbf{p})+(\mathbf{p}, -4\mathbf{q})+(2\mathbf{q}, -4\mathbf{q}) =$$

$$= 5(\mathbf{p}, \mathbf{p})+6(\mathbf{p}, \mathbf{q})-8(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 5|\mathbf{p}|^2+6|\mathbf{p}||\mathbf{q}|cos(\mathbf{p}, \mathbf{q})-8|\mathbf{q}|^2.$$

Учитывая факт, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны, а также факт, что вектора $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ единичной длины, из последнего равенства имеем

$$5+6cos(\mathbf{p}, \mathbf{q})-8 = 6cos(\mathbf{p}, \mathbf{q})-3 = 0$$

Отсюда получим $cos(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1/2$, следовательно угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ составляет 60 градусов.

Задачи.

1. Зная, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ и угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен 120 градусов, определить, при каком значении коэффициента m векторы $\mathbf{p} = m\mathbf{a}+17\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} = 3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ окажутся взаимно перпендикулярными.

2. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{A} = 5\mathbf{p}+2\mathbf{q}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{p}-3\mathbf{q}$, если известно, что $|\mathbf{p}| = 21.5$, $|\mathbf{q}| = 3$ и угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ равен 45 градусов.

3. Даны два вектора $\mathbf{a} = (3, -1, 5)^T$, $\mathbf{b} = (1, 2, -3)^T$. Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный оси OZ и удовлетворяющий условиям $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 9$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = -4$.

4. Даны вектора $\mathbf{a} = (2, -1, 3)^T, \mathbf{b} = (1, -3, 2)^T, \mathbf{c} = (3, 2, -4)^T$. Вычислить вектор $\mathbf{x}$ из условий $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 10$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 22$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = -40$.

5. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3.3 Векторное произведение

В пространстве R^3 , кроме скалярного произведения, есть еще одна бинарная (т.е. с двумя аргументами) операция - векторное умножение.

Определение. Векторным произведением двух векторов $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_k)$, называется вектор

$$\mathbf{w} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix},$$

где в правой части стоит так называемой *правило вычисления*, записанное в виде формального определителя порядка 3.

Формулу в правой части можно раскрыть и в явном виде записать

$$\mathbf{w} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\mathbf{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\mathbf{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\mathbf{k}\,,$$

однако исходная формула компактнее и легче запоминается.

Непосредственно из определения следуют **свойства векторного произведения:**

1. Линейность по сомножителям (следует из линейности по строке определителя):

2. Антисимметричность (определитель меняет знак при перестановке строк):

3. Геометрическая интерпретация: $|\,[\mathbf{u},\, \mathbf{v}]\,| = S_{parallelogramm} = 2S_{treug}$, где $S_{parallelogramm}$ - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, S_{treug} - площадь треугольника, две стороны которого - вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Контрольный вопрос. Докажите формулу $|\,[\mathbf{u},\, \mathbf{v}]\,| = S_{parallelogramm}$ прямым вычислением.

Решение типовых задач.

Задача 1. Даны вектора $\mathbf{a} = (2, 0, -3)^T$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)^T$. Найти вектора $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{f} = [\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{2b}]$.

Решение.

Найдем искомые вектора, пользуясь определением векторного произведения.

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a},\, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = (0 \cdot 1 - (-3) \cdot 2)\mathbf{i} + (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 1)\mathbf{j} + (2 \cdot 2 - 0 \cdot 1)\mathbf{k} = (6, -5, 4)^T$$

Аналогично

$$\mathbf{d} = [\mathbf{b},\, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = (2 \cdot (-3) - 1 \cdot 0)\mathbf{i} + (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3))\mathbf{j} + (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2)\mathbf{k} = (-6, 5, -4)^T$$

Для нахождения вектора $\mathbf{f}$ предварительно найдем вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (2, 0, -3)^T + (1, 2, 1)^T = (3, 2, -2)^T$ и $\mathbf{2b} = 2 \cdot (1, 2, 1)^T = (2, 4, 2)^T$. Теперь, аналогично предыдущему, по определению векторного произведения, найдем

$$\mathbf{f}=[\mathbf{a}+\mathbf{b},\ 2\mathbf{b}]=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 2\\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{vmatrix}=(2\cdot2-(-2)\cdot4)\mathbf{i}+((-2)\cdot2-3\cdot2)\mathbf{j}+(3\cdot4-2\cdot2)\mathbf{k}=(12,-10,8)^T$$

Задача 2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (6,3,-2)^T, \quad \mathbf{b}=(3,-2,6)^T$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся геометрической интерпретацией векторного произведения (см. третье свойство). Она означает, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, есть длина вектора, равного их векторному произведению, то есть $S_{parallelogramm} = |\,[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]\,|$.

Найдем векторное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{f}=[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{vmatrix}=(14,-42,-21)^T$$

Теперь найдем длину этого вектора

$|\,[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]\,| = \sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2} = 49$

Таким образом, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ равна 49.

Задачи.

1. Даны вектора $\mathbf{a}=(3,-1,-2)^T$, $\mathbf{b}=(1,2,-1)^T$. Найти вектор $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.
2. Даны вектора $\mathbf{a}=(3,-1,-2)^T, \quad \mathbf{b}=(1,2,-1)^T$. Найти вектор $[\mathbf{b},\ \mathbf{a}]$.
3. Даны вектора $\mathbf{a}=(3,-1,-2)^T, \quad \mathbf{b}=(1,2,-1)^T$. Вычислить $[2\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{b}]$.
4. Даны вектора $\mathbf{a}=(3,-1,-2)^T$, $\mathbf{b}=(1,2,-1)^T$. Найти вектор $[2\mathbf{a}-\mathbf{b},2\mathbf{a}+\mathbf{b}]$.
5. Построить единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}=(3,-1,-2)^T, \quad \mathbf{b} = (-1,3,-1)^T$.
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=(8,4,1)^T, \quad \mathbf{b}=(2,-2,1)^T$.
7. Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}=(2,3,-1)^T, \quad \mathbf{b}=(1,-2,3)^T$ при условии $(\mathbf{x},\mathbf{c})=-6$, где $\mathbf{c}=(2,-1,1)^T$.
8. Вершины четырехугольника $A(2,-3,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-4,5,6)$, $D(2,-3,6)$. Вычислить его площадь.

3.4 Смешанное произведение

Смешанное произведение $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ из R^3 определяется следующим образом:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = (\mathbf{a},\ [\mathbf{b},\ \mathbf{c}]).$$

Оно построено с помощью скалярного и векторного произведений, так что наследует их свойства.

1. Линейность по всем сомножителям.
2. $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = (\mathbf{c},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})$,
3. $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = -(\mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{b})$.
4. Геометрическая интерпретация: $|(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})| = V_{parallelepiped}$, где

$V_{parallelepiped}$ - объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Контрольный вопрос. Докажите свойства смешанного произведения.

Решение типовых задач.

Задача 1. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (1, -1, 1)^T$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{c} = (2, 3, 4)^T$.

Решение. По свойству смешанного произведения (геометрическая интерпретация) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, есть модуль их смешанного произведения. То есть, другими словами, необходимо найти модуль определителя, составленного из заданных векторов.

$$V_{parallelepiped} = |(\mathbf{a},\, \mathbf{b},\, \mathbf{c})| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Таким образом, объем исходного параллелепипеда равен 4.

Задачи.

1. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (2, -3, 1)^T$, $\mathbf{b} = (1, 1, 2)^T$, $\mathbf{c} = (3, 1, -1)^T$.

2. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах **2a-b+c**, **a+b+c**, **3a-b-c**, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$.

4 Аналитическая геометрия на плоскости

4.1 Системы координат на плоскости

В данном разделе мы представим основные объекты аналитической геометрии на плоскости. Прежде всего введем наиболее часто используемые системы координат. Саму плоскость мы представляем как двумерное пространство точек. Фиксируем одну из этих точек, назовем ее началом координат. Выпустим из этой точки взаимно-ортогональные оси (или, что то же самое, выберем пару взаимно ортогональных векторов, направляющих этих осей). Координаты точки M, числа x, y , определяются как проекции отрезка OM на оси. С векторной точки зрения эти числа - координаты вектора OM. Точке M сопоставим пару чисел (x, y), это сопоставление и есть декартова система координат на плоскости (см. рис. 1). Для введения полярной системы координат выберем начальную точку O на плоскости и выпустим из нее полярную ось. Соединим точку M на плоскости с точкой O - получим отрезок OM. Длину этого отрезка обозначим ρ, угол (отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки) обозначим φ, см. рис. 2. Сопоставление $M \leftrightarrow (\rho, \varphi)$ называется полярной системой координат.

Если начало полярной системы координат совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси X декартовой системы координат, то нетрудно связать декартовы и полярные координаты. Соотношения

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

выражают декартовы координаты через полярные координаты в этом случае, соотношения

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg(y/x),$$

описывают обращение этих соотношений.

4.2 Кривые на плоскости

Кривую на плоскости можно задавать разными способами. Например, можно описать ее в явном виде: $y = f(x)$, для заданной функции $f(x)$ с указанием интервала изменения переменной x. Кривую при этом образуют все пары точек $(x, y(x))$ для заданного интервала

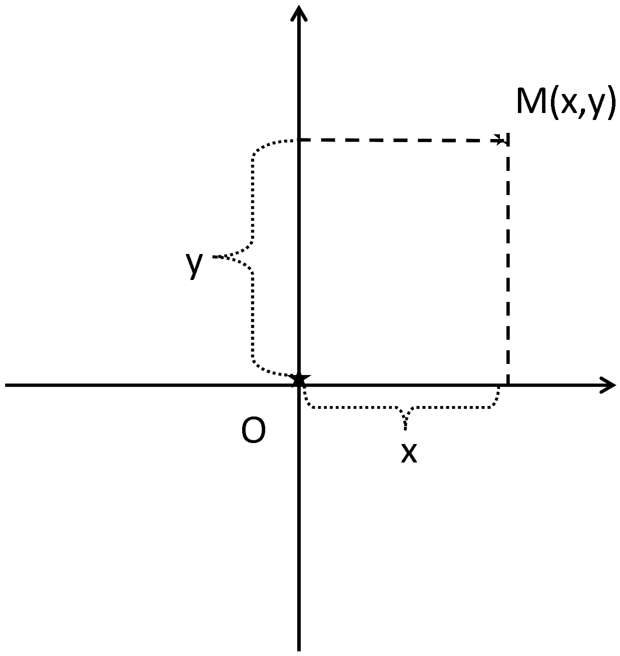

Рис. 1: Декартова прямоугольная система координат на плоскости

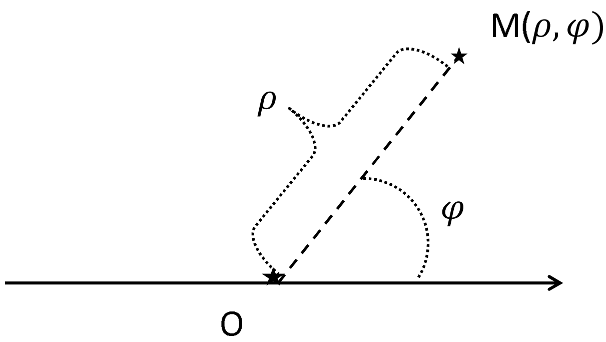

Рис. 2: Полярная система координат на плоскости

изменения x. Возможно также неявное описание кривой - как набор точек, которые являются решением уравнения $F(x, y) = 0$ для заданной функции двух переменных $F(x, y)$. Еще один способ - параметрическое описание кривой парой уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где параметр t полагается принимающим значения в заданном интервале $[t_1, t_2]$.

4.3 Кривые второго порядка на плоскости

Определение. Совокупность точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

называется кривой второго порядка.

Функция, стоящая в левой части уравнения (1), является многочленом второго порядка от переменных x, y, поэтому кривая называется кривой второго порядка.

При построении декартовой системы координат начало координат выбирается произвольным образом, и направление взаимно ортогональных осей также в определенном смысле произвольно. Поэтому возникает естественный вопрос - можно ли упростить уравнение (1) выбором системы координат? Отвечая на него, мы одновременно выясним, какими бывают кривые второго порядка на плоскости.

Теорема. Сдвигая начало координат и поворачивая оси, можно привести уравнение (1) к одному из следующих.

1. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

2. Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

3. Уравнение параболы

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{4}$$

4. Уравнение двух пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{5}$$

5. Уравнение двух параллельных прямых

$$y^2 = a^2, \quad a \neq 0, \tag{6}$$

6. Уравнение пары совпадаюших прямых

$$y^2 = 0, \tag{7}$$

7. Уравнение пары мнимых пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{8}$$

8. Уравнение мнимого эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{9}$$

9. Уравнение пары мнимых параллельных прямых

$$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0, \tag{10}$$

Доказательство.

Мы полагаем, что хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Покажем сначала, что поворотом системы координат можно привести уравнение (1) к виду, в котором $B = 0$. Поворот системы координат реализуется заменой

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \sin,$$

где φ - угол поворота системы координат, (x', y') - координаты точки в повернутой системе координат. Подставляя в (1) и выписывая только квадратичные по x', y' слагаемые, находим уравнение кривой в новых координатах:

$$x'^2 \cdot (A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + x'y'(-A\cos\varphi\sin\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C\sin\varphi\cos\varphi) +$$

$$y'^2(A\sin^2\varphi - 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi) + ... = 0,$$

где многоточие означает слагаемые меньшей степени. Коэффициент при $x'y'$ можно обратить в ноль, если подобрать φ как решение уравнения

$$tg2\varphi = \frac{2B}{A-C}.$$

Это уравнение имеет решение при любой правой части, так что поворотом на соответствующий угол можно избавиться от слагаемого, пропорционального $x'y'$. Далее мы во избежание громоздкости будем обозначать новые переменные как старые, опуская штрихи.

Итак, можно с помощью поворота системы координат прийти к уравнению

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (11)$$

Если $A \neq 0$, то заменой $x' = x + D/A$ можно обратить в ноль коэффициент при x', эта замена соответствует сдвигу начала координат по оси x в точку $x = -D/A$. Если $C \neq 0$, то же самое можно сделать и с переменной y. Разберем разные случаи.

1. $AC \neq 0$. В этом случае сдвигом по обеим осям можно привести уравнение к виду

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0. \qquad (12)$$

Если параметры A, C имеют один знак, а параметр F - другой, то перенося F направо, и разделив на $-F$, после соответствующих переобозначений параметров получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то есть уравнение (2).

Если знаки параметров A, C, F совпадают, то после переобозначений параметров мы приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

т.е. уравнению (9).

Если $F = 0$, то после переобозначений в уравнении (12) получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

т.е. уравнение (8).

Рассмотрим теперь варианты уравнения (12), соответствующие случаю $AC < 0$. Если при этом $F \neq 0$, то мы после переобозначений получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т.е. уравнение (3). Если же при этом $F = 0$, то мы получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

т.е. уравнение (5).

2. Рассмотрим теперь вариант $AC = 0$, для определенности, $A = 0$, $C \neq 0$. В этом случае уравнение (12) приобретает вид

$$Cy^2 + 2Dx + F = 0.$$

Если $D \neq 0$, то с помощью сдвига по переменной x получаем уравнение (после соответствующих переобозначений)

$$y^2 = 2px,$$

т.е. уравнение параболы (4).

Если же $D = 0$, то приходим к уравнению

$$y^2 = -F/C,$$

и для разных частных случаев получаем уравнения (6), (7), (10). ч.т.д.

Из представленных выше кривых только 7 первых имеют реальные геометрические образы - последние две точек на плоскости не имеют.

Система координат, в которых уравнение кривой совпадает с одним из представленных в теореме, называется канонической для данной кривой.

4.4 Прямая на плоскости

Для прямой на плоскости мы приведем несколько уравнений. В зависимости от задачи удобнее использовать то или иное уравнение и довольно часто требуется перейти от уравнения прямой в одной форме к уравнению, описывающему прямую в другой форме.

Для того, чтобы фиксировать прямую на плоскости, достаточно указать точку, через которую она проходит, - точку M_0, и направление - направляющий вектор $\mathbf{a}$, лежащий на этой прямой. Соединяя с точкой O точку M_0 и текущую точку прямой M, получаем пару векторов $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}$, см. рис. 3. Тогда вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лишь длиной отличается от вектора $\mathbf{a}$. Записывая этот факт, получаем *векторное уравнение прямой*:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t \cdot \mathbf{a}. \tag{13}$$

Здесь число t имеет смысл коэффициента пропорциональности между векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$. Когда точка M пробегает прямую, параметр t пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Если (a_1, a_2) - координаты вектора $\mathbf{a}$, (x, y) - координаты вектора $\mathbf{r}$, (x_0, y_0) - координаты вектора $\mathbf{r}_0$, то уравнение (13) можно записать покоординатно,

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t. \tag{14}$$

Эту пару уравнений называют *параметрическим представлением прямой на плоскости.* Исключая параметр t из этой пары уравнений, получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad k = a_2/a_1. \tag{15}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку.* Его можно переписать в виде:

$$y = kx + b, \quad b = y_0 - kx_0. \tag{16}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.* Геометрический смысл k устанавливается, если продифференцировать функцию $y(x)$ по x: $k = tg\alpha$,

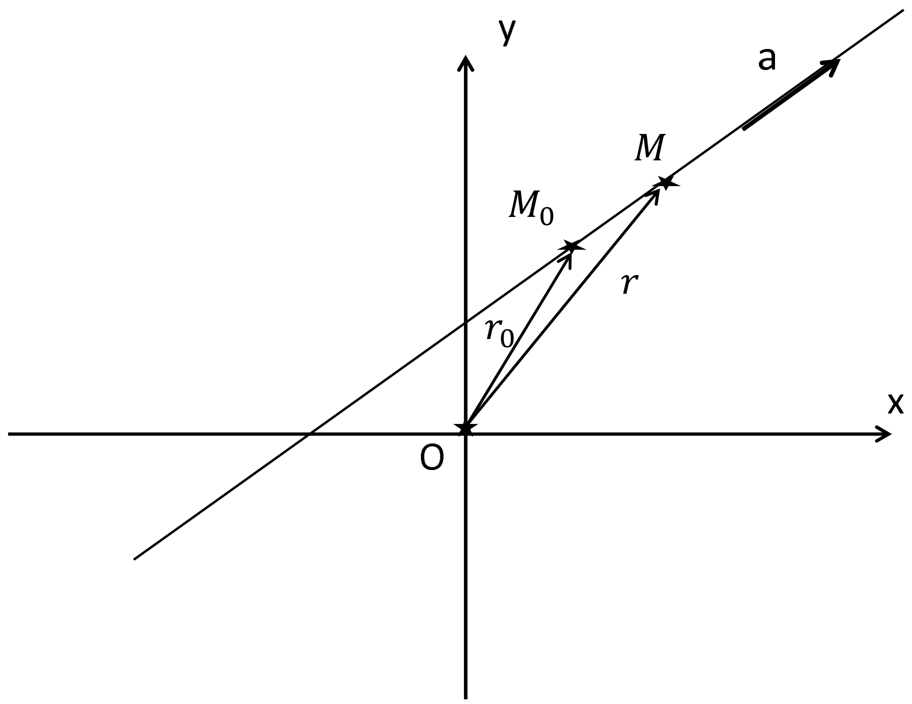

Рис. 3: Прямая определяется точкой, через которую она проходит, и направляющим вектором

где α - угол между прямой и положительным направлением оси x. Величина b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси y, см. рис. 4.

Далее, нетрудно из уравнения (15) вывести *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.* В самом деле, если прямая проходит через точки $(x_0,\, y_0)$ и $(x_1,\, y_1)$, то, подставляя вторую точку в уравнение (15) находим значение k, так что в итоге уравнение прямой приобретает вид:

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}. \tag{17}$$

Имеется еще одно полезное при решении ряда задач уравнение прямой, т.н. *нормальное уравнение прямой.* Пусть $\mathbf{a} = (a-1,\, a_2)$ - направляющий вектор прямой на плоскости. Тогда нетрудно построить нормаль $\mathbf{N}$ к этому вектору, т.е. вектор, ортогональный $\mathbf{a}$ и поэтому ортогональный прямой, $\mathbf{N} = (a_2,\, -a_1)$. Выпишем условие ортогональности векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{N}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0.$$

Подставим в это уравнение вместо вектора $\mathbf{N}$ вектор единичной длины, совпадающий с ним по направлению, $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$. Полагая $\mathbf{n} = (\cos\beta, \sin\beta)$, получим уравнение

$$x\cos\beta + y\sin\beta = d. \tag{18}$$

При этом параметр β имеет смысл угла, который образует прямая с осью y, а модуль d равен расстоянию от прямой до начала координат.

Последнее уравнение прямой - так называемое *общее уравнение прямой на плоскости*,

$$Ax + By + C = 0.$$

Очевидно, что любое из предыдущих уравнений может быть записано в этом виде.

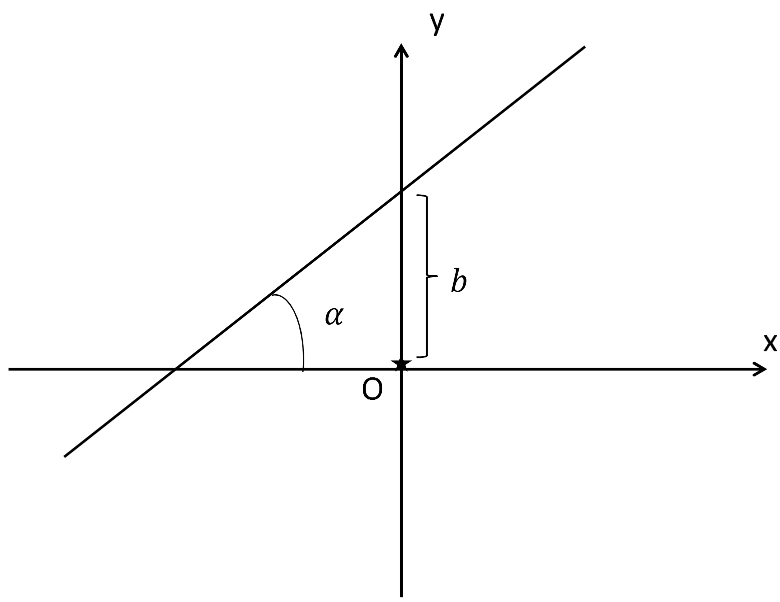

Рис. 4: Прямая: фиксирован угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси y

Угол между двумя прямыми можно вычислить разными способами, в зависимости от вида уравнений, которыми заданы прямые. Если они заданы векторными уравнениями, то этот угол равен углу между направляющими векторами прямых $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, так что

$$\cos\phi = \frac{(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|}.$$

Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами вида (16), которые имеют смысл тангенса угла наклона прямых к оси x. Вспоминая формулу для тангенса разности углов, можно написать для угла ϕ между прямыми:

$$tg\phi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Отсюда *условие параллельности прямых*: $k_1 = k_2$, *условие ортогональности прямых*: $k_1 \cdot k_2 = -1$ (в этом случае знаменатель последнего соотношения обращается в 0).

Приведем еще пару полезных формул, которые нетрудно вывести из уравнений прямой. Расстояние от заданной точки (x_1, y_1) до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Длина отрезка MN, $M = (x_1, y_1)$, $N = (x_2, y_2)$, вычисляется по формуле

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример. Проведем через точку $(-1,\, 1)$ прямую, параллельную прямой $2x+3y+7=0$. Эта прямая будет иметь уравнение $2x + 3y + C = 0$, где число C подлежит определению (коэффициенты перед x, y определяют наклон прямой и если мы возьмем их, как в исходной прямой, получим параллельную прямую). Подставляя точку в искомую прямую, получим уравнение для C: $-2 + 3 + C = 0$, так что $C = -1$ и искомое уравнение прямой: $2x + 3y - 1 = 0$.

Контрольный вопрос. Пусть задано общее уравнение прямой на плоскости. Перепишите его в виде нормального уравнения прямой.

Решение типовых задач.

Задача 1. Написать уравнения прямой в общем виде и с угловым коэффициентом, если прямая проходит через точки **A**(2,3) и **B**(4,-6).

Решение. Для написания уравнения искомой прямой воспользуемся формулой (17). Подставляя в нее вместо (x_0, y_0) координаты точки **A**, а вместо (x_1, y_1) - координаты точки **B**, получим

$$\frac{y-3}{(-6)-3} = \frac{x-2}{4-2}.$$

или

$$\frac{y-3}{-9} = \frac{x-2}{2}.$$

С помощью несложных элементарных преобразований (домножения на наименьший общий знаменатель, переноса в левую часть и приведения подобных слагаемых), получим уравнение в общем виде:

$$2y + 9x - 24 = 0.$$

Теперь приведем это уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y = 12 - \frac{9x}{2}.$$

Задача 2. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $2x+5y+6 = 0$ и $x-3y = 0$. Известны координаты одной из вершин параллелограмма - **K**(4;-1). Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

Решение. В параллелограмме противоположные стороны параллельны, значит исходная задача сводится к построению прямых, параллельных данным и проходящих через заданную точку.

Построим прямую, параллельную прямой $2x + 5y + 6 = 0$. Ее уравнение будет иметь вид $2x + 5y + C = 0$. Значение **C** определим, подставив в это уравнение координаты точки **K**: $2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) + C = 0$. Следовательно, **C = -3** и искомое уравнение стороны есть

$$2x + 5y - 3 = 0.$$

Аналогичным образом, подставляя в уравнение $x - 3y + C = 0$ координаты точки **K**: $4 - 3 \cdot (-1) + C = 0$, получим уравнение другой стороны параллелограмма:

$$x - 3y - 7 = 0.$$

Задача 3. Проверить, что прямые

$$y = 3x - 1, x + y - 7 = 0, x - 7y = 7$$

служат сторонами равнобедренного треугольника.

Решение. Известно, что равнобедренным называется треугольник, две стороны которого имеют равную длину. Следовательно, наша задача сводится к нахождению точек пересечения заданных прямых и длин соответствующих сторон треугольника.

Найдем точку пересечения прямых $y = 3x - 1, x + y - 7 = 0$, решив систему из этих уравнений. Получим точку **A** (2,5).

Аналогично, решив систему из уравнений $y = 3x - 1, x - 7y = 7$, получим координаты другой вершины - **B** (0,-1).

Наконец, решение системы $x+y-7=0, x-7y=7$ есть координаты точки пересечения этих прямых, т.е. координаты третьей вершины - **C** (7,0).

Найдем длины сторон треугольника, т.е. длины отрезков **AB**, **AC**, **BC**:

$$|AB|=\sqrt{(0-2)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{40}, |AC|=\sqrt{(7-2)^2+(0-5)^2}=\sqrt{50},$$

$$|BC|=\sqrt{(7-0)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{50}.$$

Мы получили, что $|AC|=|BC|$, значит, действительно, исходные прямые задают стороны равнобедренного треугольника.

Задача 4. Выяснить являются ли перпендикулярными прямые $3x-2y=0$ и $-4x-6y+3=0$.

Решение. Приведем уравнения к виду уравнений с угловыми коэффициентами:

$$y=\frac{3x}{2}, y=-\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$$

Тогда угловой коэффициент первого уравнения $k_1=\frac{3}{2}$, второго - $k_1=-\frac{2}{3}$. Проверим условие ортогональности, согласно которому $k_1\cdot k_2=-1$. В нашем случае имеем $k_1\cdot k_2=\frac{3}{2}\cdot-\frac{2}{3}=-1$. Это означает, что заданные прямые перпендикулярны.

Задача 5. Найти расстояние от прямой $\frac{x+3}{-4}=\frac{y-2}{3}$ до точки $P(2,-1)$.

Решение. Приводя исходное уравнение к общему виду, получим

$$3x+4y+1=0.$$

Расстояние от точки $P(2,-1)$ до прямой вычислим по формуле

$$p=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}.$$

Задачи.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,1)$ и параллельной прямой

$$\frac{x+7}{-5}=\frac{y+9}{-4}.$$

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,1)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x+7}{-5}=\frac{y+9}{-4}.$$

3. Найти угол между прямыми

$$\frac{x+7}{5}=\frac{y+3}{4},\quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-5}.$$

4. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $3y=4x$ и $5x+12y=6$.

5. Написать уравнение прямой, удаленной на 5 от прямой $12x+5y=39$.

6. Основания трапеции лежат на прямых

$$2x+\sqrt{5}y-24=0,\quad 2x+\sqrt{5}y+6=0.$$

Найти ее высоту.

7. Проверить, что прямые $2x + \frac{11}{2}y - 15 = 0$ и $\frac{23}{2}x - 5y + 30 = 0$ касаются одной и той же окружности с центром в начале координат и вычислить ее радиус.

8. На расстоянии 5 от точки $M(4, 3)$ провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях координат.

9. На оси y найти точку, равноудаленную от начала координат и от прямой $3x - 4y = 12 = 0$.

10. Через точку пересечения прямых $2x - y = 2$ и $x + y = 1$ провести прямую, параллельную прямой $y = 3x - 2$.

11. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 5$ и вершину прямого угла $M(4, -1)$.

12. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из диагоналей $x + 3y - 6 = 0$.

13. Найти уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3, 4)$ и уравнения двух высот $7x - 2y = 1$ и $2x - 7y = 6$.

14. Через точку $M(0, 1)$ провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между двумя данными прямыми $x - 3y + 10$ и $2x + y - 8 = 0$, делился в этой точке пополам.

15. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4, 2)$ и уравнения двух медиан $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$.

16. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-5, 2)$ и $C(3, -4)$. Составить уравнения его сторон.

4.5 Эллипс

Выпишем еще раз каноническое уравнение эллипса,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{19}$$

см. рисунок 5. При каноническом описании полагают, что $a > b > 0$. Заметим, что если $a = b$, то эллипс превращается в окружность. Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ называют вершинами эллипса, параметр a - большая полуось, параметр b - малая полуось. Далее, вводят параметр $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, точки $(c, 0)$, $(-c, 0)$ называют фокусами эллипса. Величину $\varepsilon = c/a$ называют эксцентриситетом эллипса. Она характеризует вытянутость эллипса. Из определений следует, что для эллипса $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Опишем сначала *элементарные свойства эллипса*, следующие непосредственно из канонического уравнения (19).

1. Из этого уравнения следует, что если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то выполняются неравенства $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Таким образом, все точки эллипса лежат в этом прямоугольнике (конечном!).

2. Так как переменные x, y входят в уравнение эллипса только в квадратах, то из того, что (x, y) лежат на эллипсе следует, что точки $(\pm x, \pm y)$ также лежат на эллипсе при любом выборе знаков. Это означает, что эллипс симметричен при отражении относительной осей координат и имеет центр симметрии, точку O.

Эллипс можно описать как геометрическое место точек. Для этого соединим точку M, лежащую на эллипсе, с фокусами. Соответствующие отрезки называются фокальными радиусами точки (см. рис. 2, отрезки r_1, r_2).

Теорема. Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы сумма ее фокальных радиусов равнялась $2a$,

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{20}$$

Доказательство.

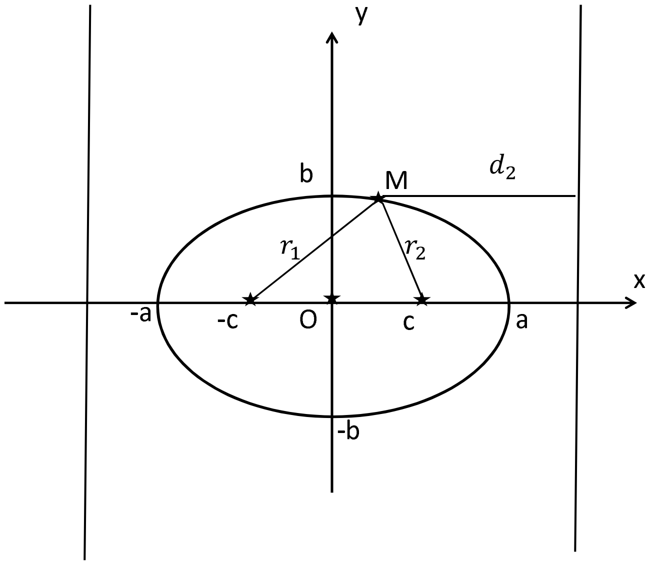

Рис. 5: Эллипс и его директрисы

1. Достаточность. Из рисунка получаем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

так что выполняется условие

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Покажем, что отсюда следует, что (x, y) удовлетворяет уравнению (19). Избавимся от корней. Для этого перенесем один из корней направо и возведем в квадрат. Раскрывая скобки, получим:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Сокращая подобные члены и деля на 4, получим:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Возводя еще раз в квадрат, приходим к формуле:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.$$

Сокращая еще раз подобные члены, получим:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Подставляя $c^2 = a^2 - b^2$, получаем соотношение, только множителем отличающееся от соотношения (19).

2. Необходимость. Пусть выполняется (19), вычислим r_1. Имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2xc + a^2} = a + \varepsilon x.$$

Вычисление r_2 по этой схеме приводит к результату (имеется отличие только в одном знаке!) $r_2 = a - \varepsilon x$. Из свойств эллипса следует, что в правой части - положительное число. Складывая, получаем (20), что и требовалось доказать.

Имеется еще одно описание эллипса. Введем так называемые директрисы эллипса - прямые $x = \pm a/\varepsilon$ (см. рис. 2).

Теорема. Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы было равно эксцентриситету эллипса,

$$r_2/d_2 = \varepsilon. \tag{21}$$

Доказательство.

1. Достаточность. Пусть $r_2 = \varepsilon d_2$. Из рисунка следует, что $d_2 = a/\varepsilon - x$, так что

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x.$$

Возводя в квадрат, получаем:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2.$$

Приводя подобные члены и учитывая явное выражение для ε, получаем:

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Это соотношение, после домножения на подходящий множитель, переходит в (19).

2. Необходимость. Пусть точка (x, y) лежит на эллипсе, т.е. выполняется уравнение (19). Как было показано при доказательстве предыдущей теоремы, мы получаем $r_2 = a - \varepsilon x$. Из рисунка: $d_2 = a/\varepsilon - x$. Делим одно на другое - получаем (21), что и требовалось доказать.

Пример. Пусть известно следующее: расстояния одного из фокусов эллипса до концов большой оси равны 7 и 1. Составим уравнение этого эллипса. Указанные расстояния равны $a + c$ и $a - c$ соответственно, так что имеем: $a = 4$, $c = 3$. Далее, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, откуда $b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. В итоге получаем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

Решение типовых задач.

Задача 1. Дано уравнение эллипса $x^2 + 4y^2 = 25$. Вычислить длину его полуосей, координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\frac{5}{2})^2} = 1$$

Отсюда получим, что длина большой полуоси $a = 5$, длина малой полуоси $b = \frac{5}{2}$.

Найдем параметр c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Тогда точки фокуса имеют координаты $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}, 0\right)$ и $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, 0\right)$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$.

Задача 2. Написать уравнение эллипса с фокусами $C_1(-7;0)$ и $C_2(7;0)$, проходящего через точку $\mathbf{M}$(-2;12).

Решение. Найдем фокальные радиусы точки $\mathbf{M}$:

$$r_1 = |MC_1| = \sqrt{(-7-(-2))^2 + (0-12)^2} = 13, r_2 = |MC_2| = \sqrt{(7-(-2))^2 + (0-12)^2} = 15.$$

По формуле (20) сумма фокальных радиусов равна длине большой оси эллипса: $r_1 + r_2 = 2a$, следовательно, в нашем случае имеем $13+15 = 2a$. Значит длина большой полуоси $a = 14$.

Длину малой полуоси найдем из равенства $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тогда

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{14^2 - 7^2} = 7\sqrt{3}.$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса с заданными условиями есть

$$\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{147} = 1$$

Задача 3. В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

Решение. Исходя из условия, можно утверждать, что одна из сторон вписанного в эллипс прямоугольника равна $2c$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 24} = 5$.

Длина другой стороны есть длина хорды, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через фокус эллипса, т.е. соответсвующей уравнению $x = 5$. Подставив в уравнение эллипса $x = 5$, получим

$$\frac{5^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

Отсюда $y^2 = \frac{24^2}{49}$, тогда $y = \pm\frac{24}{7}$.

Вторая сторона прямоугольника равна $2|y|$.

Тогда искомая площадь равна

$$S = 2c \cdot 2|y| = 10 \cdot \frac{48}{7} = 68\frac{4}{7}.$$

Задачи.

1. Дано уравнение эллипса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длину его осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

2. Составить простейшее уравнение эллипса, у которого сумма полуосей и расстояние между фокусами равны 8.

3. В эллипс

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

вписан прямоугольник, противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить его площадь.

4. На эллипсе

$$\frac{x^2}{30} + \frac{9y^2}{24} = 1$$

найти точку, расстояние которой от оси y равно пяти.

5. Эллипс, оси которого совпадают с осями координат, проходит через точки $(2, 30.5)$ и $N(0, 2)$. Написать его уравнение и найти фокальные радиусы точки M.

6. Составить простейшее уравнение эллипса, проходящего через точки $M(\sqrt{3}, -2)$ и $N(-2\sqrt{3}, 1)$.

7. Написать уравнение эллипса, если расстояние между директрисами равно 12, а большая полуось равна $2\sqrt{3}$.

8. В эллипс
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$
вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

9. На эллипсе
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$
найти точку, расстояние которой от правого фокуса в 4 раза больше расстояния от левого фокуса.

10. Дан эллипс
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$
Через точку $(1, 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

4.6 Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы (см. рис. 6)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{22}$$

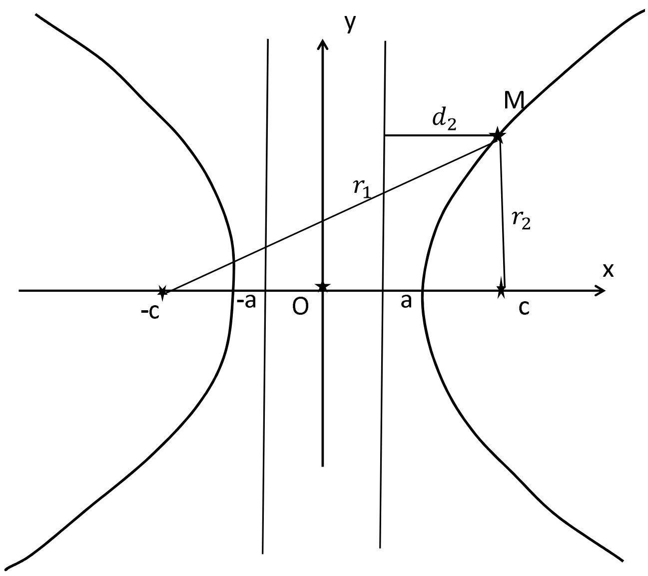

Рис. 6: Гипербола и ее директрисы

Это уравнение, напомним, выполняется в специальной системе координат, которая называется канонической. Числа a, b называются вещественной и мнимой полуосями гиперболы. Точки $(\pm a, 0)$ называются вершинами гиперболы.

Выпишем *элементарные свойства гиперболы.*

1. Из уравнения следует, что $|x| \geq a$.

2. Так как переменные x, y входят в уравнение гиперболы только в квадратах, то из того, что (x, y) лежат на гиперболе следует, что точки $(\pm x, \pm y)$ также лежат на гиперболе при любом выборе знаков. Это означает, что гипербола симметрична при отражении относительной осей координат и имеет центр симметрии, точку O.

3. Гипербола состоит из двух ветвей, содержит точки, сколь угодно далекие от начала координат.

4. Решая уравнение (22) относительно переменной y, получаем:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Когда $|x| \to \infty$, ветви гиперболы приближаются к прямым $y = \pm bx/a$. Эти прямые называются асимптотами гиперболы, она лежит между ними.

Положим для гиперболы $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, эксцентриситет $\varepsilon = c/a$. Эксцентриситет описывает вытянутость гиперболы. Точки $(\pm c,\ 0)$ называются фокусами гиперболы. Как следует из определений, $c > a$, так что для гиперболы $\varepsilon > 1$. Отрезки, соединяющие точку M гиперболы с ее фокусами, называются фокальными радиусами точки M.

Уравнение гиперболы очень похоже на уравнение эллипса, отличие - в знаке одного из членов уравнения. Поэтому и описание гиперболы в определенном смысле параллельно описанию эллипса. Доказательство теорем по существу повторяет доказательство аналогичных результатов для эллипса.

Теорема. Для того, чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы модуль разности ее фокальных радиусов равнялась $2a$,

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{23}$$

Доказательство.

1. Достаточность. Из рисунка получаем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

так что выполняется условие (для определенности будем рассматривать правую ветвь гиперболы, так что $r_1 > r_2$)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Покажем, что отсюда следует, что (x, y) удовлетворяет уравнению (22). Надо избавиться от корней. Для этого перенесем один из корней направо и возведем в квадрат. Раскрывая скобки, получаем:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Сокращая подобные члены и деля на 4, получаем:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2.$$

Возводя еще раз в квадрат, приходим к формуле:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.$$

Сокращая еще раз подобные члены, получаем:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Подставляя $c^2 = a^2 + b^2$, получаем соотношение, только множителем отличающееся от соотношения (22).

2. Необходимость. Пусть выполняется (22), вычислим r_1. Имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} =$$

$$\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2xc + a^2} = a + \varepsilon x.$$

Вычисление r_2 по этой схеме приводит к результату (имеется отличие только в одном знаке!) $r_2 = \varepsilon x - a$. Из свойств гиперболы следует, что в правой части - положительное число. Вычитая, получаем (23), что и тебоваось доказать.

Имеется еще одно описание эллипса. Введем т.н. директрисы гиперболы - прямые $x = \pm a/\varepsilon$, см. рис. 6. В данном случае $\varepsilon > 1$, так что директрисы лежат между вершинами гиперболы.

Теорема. Для того, чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы было равно эксцентриситету гиперболы,

$$r_2/d_2 = \varepsilon. \tag{24}$$

Доказательство.

1. Достаточность. Пусть $r_2 = \varepsilon d_2$. Из рисунка следует, что $d_2 = a/\varepsilon - x$, так что

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x.$$

Возводя в квадрат, получаем:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2x^2.$$

Приводя подобные члены и учитывая явное выражение для ε, получаем:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Это соотношение, после домножения на подходящий множитель, переходит в (22).

2. Необходимость. Пусть точка (x, y) лежит на гиперболе, т.е. выполняется уравнение (22). Как было показано при доказательстве предыдущей теоремы, мы получаем $r_2 = \varepsilon x - a$. Из рисунка: $d_2 = x - a/\varepsilon$. Делим одно на другое - получаем (24). ч.т.д.

Пример. Пусть известно следующее: фокусное расстояние $c = 10$, она проходит через точку $(12,\, 3\sqrt{5})$. Напишем уравнение этой гиперболы. Подставляя точку в каноническое уравнение гиперболы, получаем:

$$\frac{144}{a^2} - \frac{45}{b^2} = 1.$$

Обозначая $b^2 = s$, получим квадратное уравнение $s^2 + 89s - 4500 = 0$. Его положительное решение $s = 36$. Соответственно, $a^2 = 100 - 36 = 64$. Таким образом, искомая гипербола имеет вид

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1,$$

Решение типовых задач.

Задача 1. Написать уравнение гиперболы и уравнения ее асимптот, если вещественная полуось равна $\sqrt{15}$ и гипербола проходит через точку $\mathbf{M}(5, \sqrt{6})$.

Решение. По условию $a = \sqrt{15}$. Длину мнимой полуоси найдем, подставив в каноническое уравнение гиперболы координаты точки $\mathbf{M}$:

$$\frac{5^2}{15} - \frac{6}{b^2} = 1$$

Отсюда $b = 3$. Тогда можно записать каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{9} = 1$$

и уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{\sqrt{15}}x$.

Задача 2. Написать уравнение гиперболы с фокусами $F_1(-7;0)$ и $F_2(7;0)$, проходящей через точку $\mathbf{M}$(-2;12).

Решение.

Найдем фокальные радиусы точки $\mathbf{M}$:

$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(-7-(-2))^2 + (0-12)^2} = 13,\ r_2 = |MF_2| = \sqrt{(7-(-2))^2 + (0-12)^2} = 15.$$

По формуле (23) модуль разности фокальных радиусов равен длине большой оси гиперболы: $|r_1 - r_2| = 2a$, следовательно, в нашем случае имеем $|13 - 15| = 2a$. Значит длина большой полуоси $a = 1$.

По условию $c = 7$. Тогда из соотношения $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ выразим малую полуось - $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48}$.

Запишем каноническое уравнение гиперболы

$$x^2 - \frac{y^2}{48} = 1.$$

Задача 3. Написать каноническое уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Найдем координаты фокусов эллипса, для них выполняется соотношение $c^2 = a^2 - b^2$. Т.е., в нашем случае $c^2 = 25 - 16 = 9$. Тогда, точки $F_1(-3;0)$ и $F_2(3;0)$ являются фокусами и эллипса и гиперболы.

Эксцентриситет вычисляется по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, следовательно, $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{2}$.

Кроме того, для гиперболы справедливо соотношение $c^2 = a^2 + b^2$. Тогда $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$.

Таким образом, искомое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{4x^2}{9} - \frac{4y^2}{27} = 1$.

Задачи.

1. Написать уравнение гиперболы, полуось которой равна половине фокусного расстояния эллипса

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1,$$

а фокусное расстояние гиперболы равно большой оси эллипса.

2. Написать каноническое уравнение гиперболы, если угол между ее асимптотами равен 60 градусов, и гипербола проходит через точку $(4\sqrt{3}, 2)$.

3. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1,$$

эксцентриситет которой равен 1,25.

4. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом

$$\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{19} = 1,$$

и проходящей через точку $(4\sqrt{2}, 3)$.

5. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точки $(6, -1)$, $(-8, 2\sqrt{2})$.

6. Вычислить фокальные радиусы для точки (-5;9/4), лежащей на гиперболе

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

7. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой эксцентриситет равен 2.

8. Вычислить полуоси гиперболы, асимптоты которой даны уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра.

9. На гиперболе

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

найти точку, для которой расстояние от левого фокуса в 2 раза больше, чем расстояние от правого фокуса.

10. Через точку $(3, -1)$ провести хорду гиперболы

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1,$$

делящуюся в этой точке пополам.

4.7 Парабола

Выпишем уравнение параболы, записанное в канонической системе координат,

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{25}$$

Из уравнения следует, что для всех точек параболы x - неотрицательно. Далее, переменная y входит в это уравнение во второй степени, так что если точка (x, y) лежит на параболе, то и точка $(x, -y)$ лежит на параболе. Таким образом, парабола симметрична при отражении относительно оси x.

Точка $(p/2,\ 0)$ называется фокусом параболы. Директрисой параболы называется прямая $x = -p/2$.

Теорема. Для того, чтобы точка лежала на параболе, необходимо и достаточно, чтобы расстояние от нее до фокуса совпало с расстоянием от нее до директрисы.

Доказательство.

1. Достаточность. Расстояние до директрисы для точки (x, y) равно $x+p/2$, фокальный радиус равен

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Приравнивая и возводя в квадрат, получаем:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Приводя подобные члены, приходим к уравнению (25).

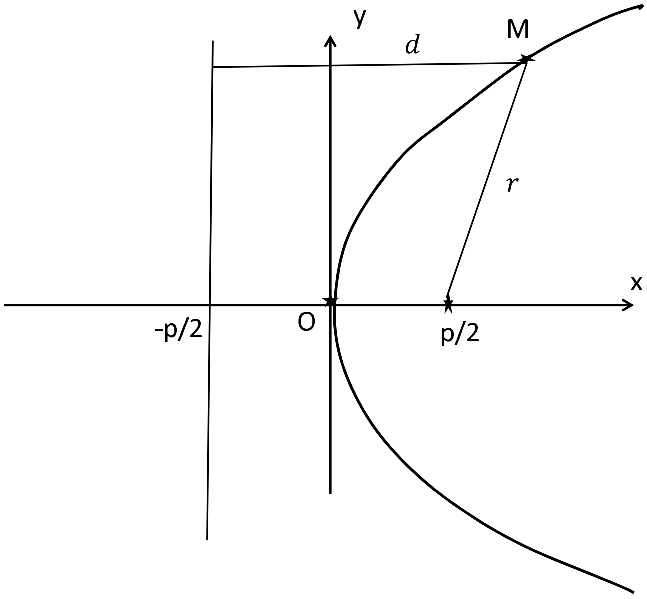

Рис. 7: Парабола и ее директриса

2. Необходимость. Имеем:

$$r = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + p^2/4 + y^2},$$

подставляя $y^2 = 2px$, получаем под корнем полный квадрат от $d^2 = x + p/2$, что и требовалось доказать.

Решение типовых задач.

Задача 1. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы для параболы $3y^2 + 12y - 18x + 12 = 0$.

Решение. С помощью несложных преобразований приведем заданное уравнение параболы к каноническому виду:

$$3(y^2 + 4y + 4) - 18x = 0,$$

$$3(y + 2)^2 = 18x,$$

$$(y + 2)^2 = 2 \cdot 3x.$$

Из последнего уравнения следует, что вершина параболы расположена в точке $\mathbf{A}(0, -2)$, а параметр $p = 3$. Следовательно, фокусом является точка $\mathbf{F}\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, а директрисой является прямая $x = -\frac{3}{2}$.

Задача 2. Составить уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью абсцисс.

Решение. Несложно заметить, что точкой пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью абсцисс является точка $\mathbf{F}(1{,}0)$.

По условию эта точка является фокусом параболы, следовательно, параметр $p = 2$. Тогда уравнение параболы записывается как $y^2 = 4x$.

Задача 3. Найти уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 3 = 0$ параллельно прямой, соединяющей фокус параболы $y = 4x^2$ и правый фокус эллипса $\frac{x^2}{13} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

Решение. Приведем уравнение окружности к каноническому виду

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 - 16 - 4 - 3 = 0,$$

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 23.$$

Таким образом, центром окружности является точка $\mathbf{O}(-4, 2)$. Т Далее, фокусом параболы $y = 4x^2$ является точка $\mathbf{A}(1, 0)$. Правый фокус эллипса $\frac{x^2}{13} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ находится в точке с координатами $\mathbf{B}(\sqrt{a^2+b^2}, 1)$, т.е. в точке $\mathbf{B}(2, 1)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $\mathbf{A}(1, 0)$ и $\mathbf{B}(2, 1)$:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0}.$$

В результате получим прямую $y - x + 1 = 0$.

Искомая прямая есть прямая, параллельная $y - x + 1 = 0$ и проходящая через точку $\mathbf{O}$(-4,2), т.е. имеющая вид $y - x + C = 0$. Константу C найдем, подставив координаты точки $\mathbf{O}$: $2 - (-4) + C = 0$, т.е. $C = -6$.

Таким образом, уравнение искомой прямой есть $y - x - 6 = 0$.

Задачи.

1. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы для параболы $y^2 = 6x$.

2. Определить точки пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ и параболы $x^2 = 4y$.

3. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

4. Через точку $(2, 1)$ проведена хорда параболы $y^2 = 4x$, которая делится в этой точке пополам. Найти ее уравнение.

5. Вычислить длину сторон правильного треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 2px$.

6. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с эллипсом

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

7. Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Вычислить ее длину.

8. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 20.

9. Составить уравнения сторон треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 8x$ так, что отдна из его вершин совпадает с вершиной параболы, а точка пересечения высот совпадает с фокусом параболы.

10. Через точку $(2, 1)$ провести хорду параболы $y^2 = 4x$, делящуюся в этой точке пополам.

4.8 Кривые второго порядка в полярных координатах

Для кривых второго порядка - эллипса, гиперболы и параболы - можно получить простое описание в полярных координатах. Для этого надо поместить начало координат в фокусе (мы выбираем правый фокус) и полярную ось совместить с положительным направлением оси x.

1. *Эллипс.*

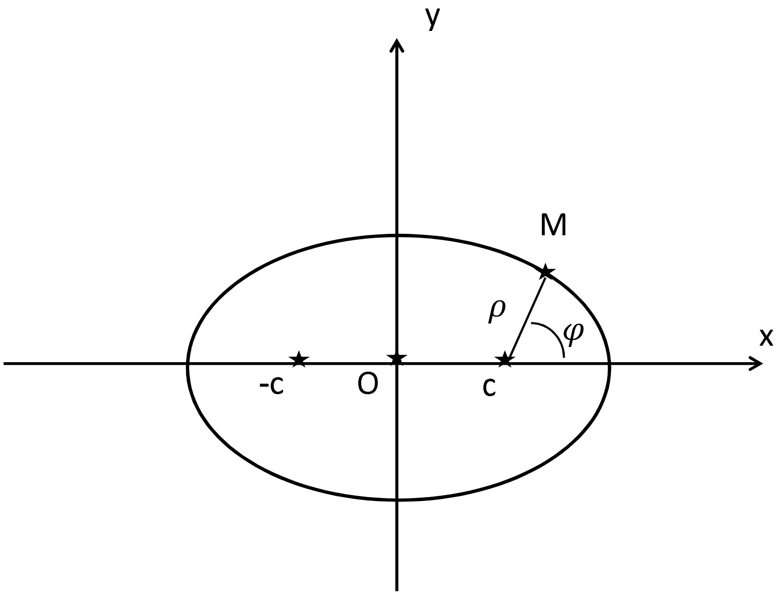

Рис. 8: Эллипс в полярной системе координат

Описанная система координат изображена на рис. 8. При обсуждении эллипса была получена формула для фокального радиуса: $\rho = a - \varepsilon x$. Из рисунка следует: $x = c + \rho \cos\varphi$. Подставляя, получаем:

$$\rho = a - \varepsilon c - \varepsilon \rho \cos\varphi.$$

Собирая слагаемые с ρ, приходим к уравнению

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad p = a - \varepsilon c.$$

Это и есть уравнение эллипса в полярной системе координат. Отметим следующие обстоятельства. В знаменателе стоит выражение, положительное при всех значениях φ (поскольку для эллипса $\varepsilon < 1$). Поэтому из этого уравнения следует, что эллипс имеет точки при всех углах φ, причем при всех углах значения ρ конечны.

2. *Гипербола.*

Для гиперболы имеем, согласно проведенным выше вычислениям, $\rho = \varepsilon x - a$. Из рис. 9 следует, что $x = c + \rho \cos\varphi$. Подставляя это значение и собирая слагаемые с ρ, получаем

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad p = a - \varepsilon c,$$

уравнение гиперболы в полярной системе координат. Формально это уравнение совпадает с уравнением эллипса, однако имеется важное отличие: $\varepsilon > 1$. Это означает, что есть углы, для которых знаменатель отрицателен - при этих значениях угла гипербола не имеет точек. Для двух значений угла знаменатель обращается в 0, так что при этих углах ρ обращается в бесконечность. Таким образом, гипербола неограниченная кривая. Это уравнение описывает одну ветвь (правую) гиперболы.

3. *Парабола.*

Пусть точка $M = (x, y)$ лежит на параболе. Согласно приведенным выше вычислениям, $\rho = x + p/2$, а согласно картинке 10 имеем: $x = p/2 + \rho \cos\varphi$. Подставляя в первое соотношение и собирая слагаемые с ρ, получаем:

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

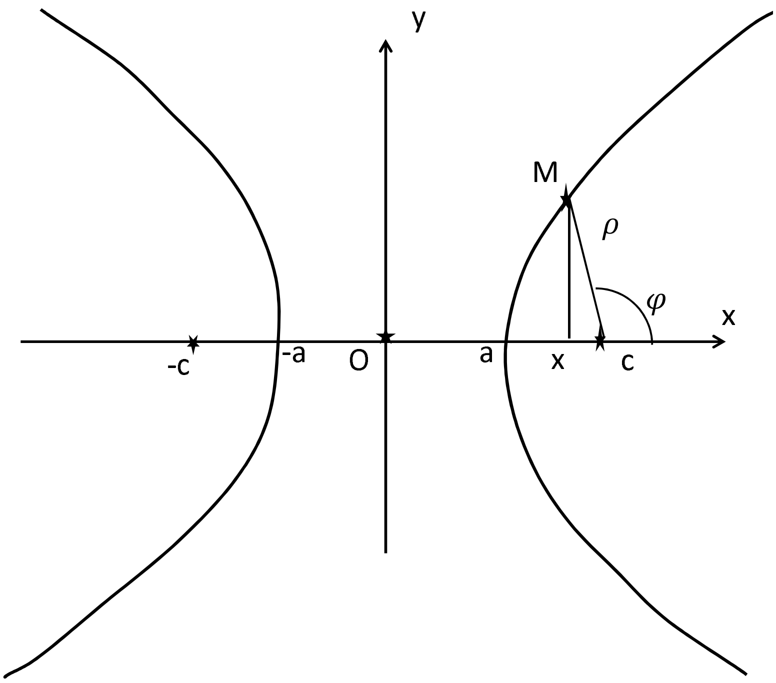

Рис. 9: Гипербола в полярной системе координат

Это и есть уравнение параболы в полярной системе координат. Отметим, что только при $\varphi = 0$ знаменатель обращается в ноль, что соответствует обращению в ∞ величины ρ. Таким образом, парабола также содержит бесконечно удаленные точки.

Отметим, что уравнения всех трех кривых в полярной системе координат по существу совпадают - отличаются только допустимые значения параметра $\varepsilon 1$ в знаменателе. Для эллипса он от нуля до единицы, для гиперболы - больше единицы, а для параболы равен -1. Эти значения и определяют различия этих кривых.

4.9 Касательные

Пусть на плоскости задана кривая уравнением $F(x, y) = 0$ (т.е. неявным образом). Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит этой кривой. Выпишем уравнение касательной к кривой в этой точке.

Напомним, что если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то, как известно из курса дифференциального исчисления, угловой коэффициент касательной в точке (x_0, y_0), лежащей на кривой, равен значению производной $f(x)$ в этой точке, т.е. $k = f'(x_0)$. Таким образом, уравнение касательной (уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку) имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если кривая задана неявно, то производная $f'(x_0)$ вычисляется согласно соотношению

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}|_{x_0, y_0}.$$

Подставляя в уравнение касательной, получаем уравнение касательной в окончательном виде:

$$(y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0. \tag{26}$$

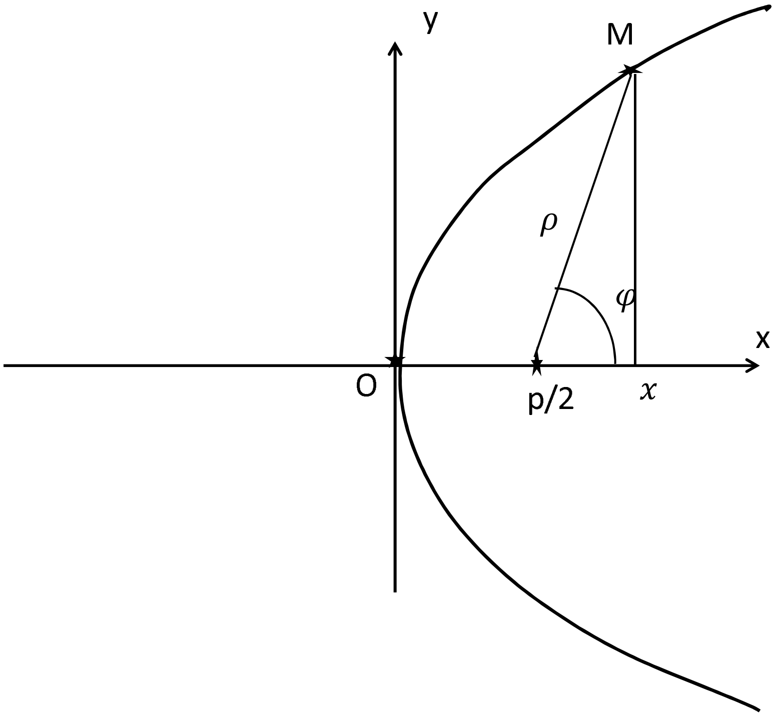

Рис. 10: Парабола в полярной системе координат

Рассмотрим с помощью этого соотношения касательные к кривым второго порядка.

1. Касательная к эллипсу.

Исходное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

так что $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$. При этом уравнение (26) принимает вид

$$\frac{2(x - x_0)x_0}{a^2} + \frac{2(y - y_0)y_0}{b^2} = 0.$$

Сокращая на 2 и учитывая, что точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе, получаем уравнение касательной эллипса, проходящей через эту точку:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{27}$$

2. Касательная к гиперболе.

Исходное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

так что $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2}$. При этом уравнение (26) принимает вид

$$\frac{2(x - x_0)x_0}{a^2} - \frac{2(y - y_0)y_0}{b^2} = 0.$$

Сокращая на 2 и учитывая, что точка (x_0, y_0) лежит на гиперболе, получаем уравнение касательной гиперболы, проходящей через эту точку:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{28}$$

3. Касательная к параболе.

Исходное уравнение

$$y^2 - 2px = 0,$$

так что $\frac{\partial F}{\partial x} = -2p$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. При этом уравнение (26) принимает вид

$$-2p(x - x_0) + 2(y - y_0)y_0 = 0.$$

Сокращая на 2 и учитывая, что точка (x_0, y_0) лежит на параболе, получаем уравнение касательной параболы, проходящей через эту точку:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{29}$$

Пример. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение. Из уравнения параболы следует, что в данном случае $p = 6$. Если абсцисса точки параболы равна 3, то ордината $y_0 = 6$ (второй вариант $y_0 = -6$ обсуждается аналогично). Согласно (29) уравнение касательной имеет вид: $6y = 6(x + 3)$, или, сокращая на 6, $y = x + 3$.

Задачи.

1. Написать уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

перпендикулярных прямой $13x + 12y - 14 = 0$.

2. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(-6, 3)$ к эллипсу

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3. К данной гиперболе

$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$$

провести касательную параллельно прямой $x - 2y = 0$.

4. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y = \pm x/2$ и уравнение одной из ее касательных, $5x - 6y - 8 = 0$.

5. Через точку $M(5, -7)$ провести касательную к параболе $y^2 = 8x$.

5 Аналитическая геометрия в трехмерном пространстве

5.1 Системы координат в трехмерном пространстве

В данном разделе мы представим основные объекты аналитической геометрии в трехмерном пространстве. Прежде всего введем наиболее часто используемые системы координат. Фиксируем одну из точек пространства O, назовем ее началом координат. Выпустим из этой точки 3 взаимно ортогональные оси (или, что то же самое, выберем тройку взаимно ортогональных векторов, направляющих этих осей). Координаты точки M - числа x, y, z, определяются как проекции отрезка OM на оси. С векторной точки зрения эти числа - координаты вектора OM. Точке M сопоставим тройку чисел (x, y, z), это сопоставление и есть декартова система координат на плоскости (см. рис. 11).

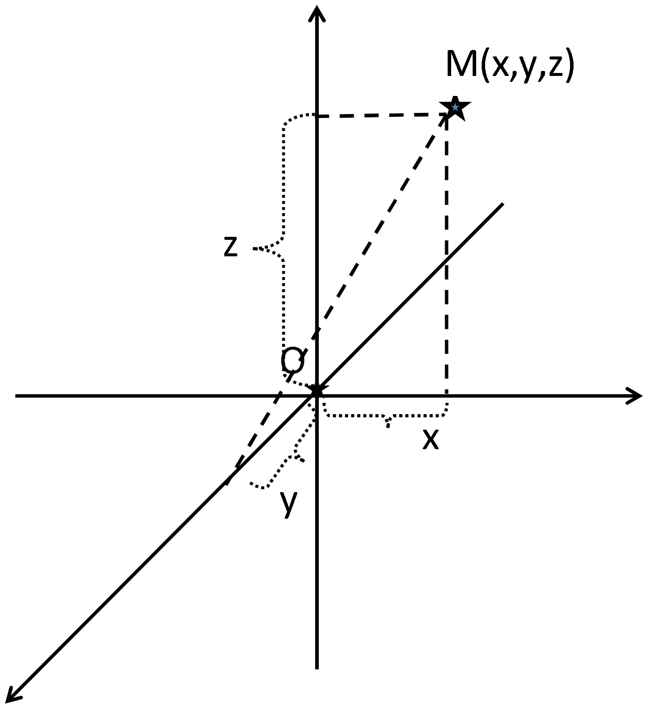

Рис. 11: Декартова система координат в трехмерном пространстве

Еще одна часто используемая система координат в трехмерном пространстве - цилиндрическая. Она применяется, если в рассматриваемой задаче есть осевая симметрия (при этом осью симметрии назначается ось z). Положим ее начало координат совпадающим с точкой O, ось z совместим с осью z декартовой системы координат, а в плоскости (x, y) введем полярную систему координат, сопоставляя проекции текущей точки M ее полярные координаты (ρ, φ). Обычно полярную ось совмещают с положительным направлением оси x декартовой системы координат, см. рис. 12. В этом случае легко написать формулы, связывающие цилиндрические координаты с декартовыми,

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z.$$

При этом координаты принимают значения в следующих пределах: $z \in (-\infty, +\infty)$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Еще одна часто используемая система координат в трехмерном пространстве - сферическая, применяется, если в задаче есть симметрия при поворотах относительно фиксированной точки. Эту точку назначают началом координат, и фиксируют одну ось (ее обычно совмещают с осью z декартовой системы координат). Угол между этой осью и вектором OM обозначают θ, длину вектора OM обозначают ρ. Затем в плоскости, перпендикулярной оси, фиксируют направление (обычно его совмещают с положительным направлением оси x) и угол между эти направлением и плоскостью, проходящей через ось z и вектор OM, обозначают φ, см. рис. 13. Нетрудно выписать связь с декартовыми координатами в принятых выше предположениях. Имеем:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

В принятой параметризации координаты принимают значения в следующих интервалах: $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

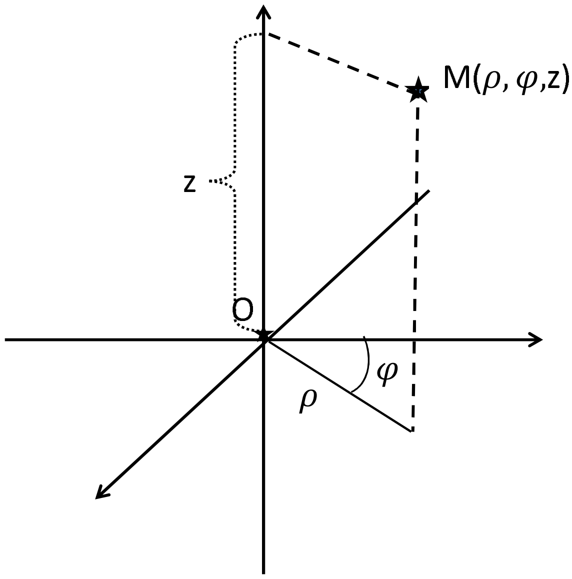

Рис. 12: Цилиндрическая система координат в трехмерном пространстве

5.2 Кривые и поверхности в трехмерном пространстве

Кривые в трехмерном пространстве можно задавать разными способами. Можно их описывать явным образом, с помощью пары функций,

$$y = f(x), \quad z = g(x),$$

для x, принимающего значения в некотором интервале. Можно кривую задавать параметрическим образом, с помощью соотношений

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \eta(t)$$

для фиксированных функций и t, принимающего значения в некотором интервале. Аналогичным образом можно задачать кривые и с помощью других систем координат.

Поверхности можно задавать явным образом,

$$z = F(x, y),$$

предполагая, что (x, y) пробегают значения в некоторой области.

Кроме того, поверхности можно задавать неявным образом, как набор точек, удовлетворяющих уравнению

$$G(x, y, z) = 0$$

для известной функции $G(x, y, z)$.

Еще один способ - параметрическое задания поверхности. Пусть переменные (t, s), принимают значения в некоторой области, тогда соотношения

$$x = f(t, s),\, y = g(t, s),\, z = h(t, s)$$

для некоторых функций $f(t, s)$, $g(t, s)$, $h(t, s)$ задают поверхность в трехмерном пространстве.

Можно использовать и другие (не декартовы) системы координат в трехмерном пространстве для задания поверхностей.

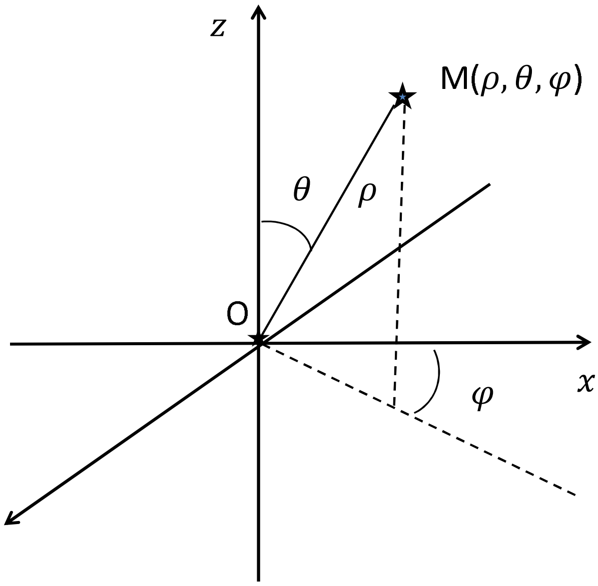

Рис. 13: Сферическая система координат в трехмерном пространстве

5.3 Плоскость в трехмерном пространстве

Для фиксации плоскости в трехмерном пространстве фиксируем сначала точку M_0, через которую проходит плоскость. Однако через точку можно провести много плоскостей. Для однозначной фиксации плоскости следует задать вектор ее нормали $\mathbf{N}$, которой ортогональна плоскость вместе со всеми прямыми на ней, см. рис. 14. Рассмотрим вектора $\mathbf{r}_0 = OM_0$ и $\mathbf{r} = OM$. Вектор $\mathbf{r}$-$\mathbf{r}_0$ лежит на плоскости и ортогонален нормали N,

$$(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0.$$

Раскрывая скобки скалярного произведения, получаем:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}) = d, \quad d = (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}). \tag{30}$$

Это уравнение называется *векторным уравнением плоскости.* Пусть $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, тогда это уравнение перепишется в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -d. \tag{31}$$

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.* Отметим, что по виду этого уравнения можно построить вектор нормали $\mathbf{N} = (A, B, C)^T$.

Если $D \neq 0$, то уравнение (31) можно, перенося D направо и деля все уравнение на $-D$, переписать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{32}$$

это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках.* Геометрический смысл параметров a, b, c - величина отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Есть еще один способ задания плоскости в трехмерном пространстве. Если вектора $\mathbf{p} = (p_1,\, p_2,\, p_3)^T$, $\mathbf{q} = (q_1,\, q_2,\, q_3)^T$ лежат на плоскости, и если они линейно независимы, то любой вектор можно представить как их линейную комбинацию. Так, вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ можно представить в виде

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t_1\mathbf{p} + t_2\mathbf{q}.$$

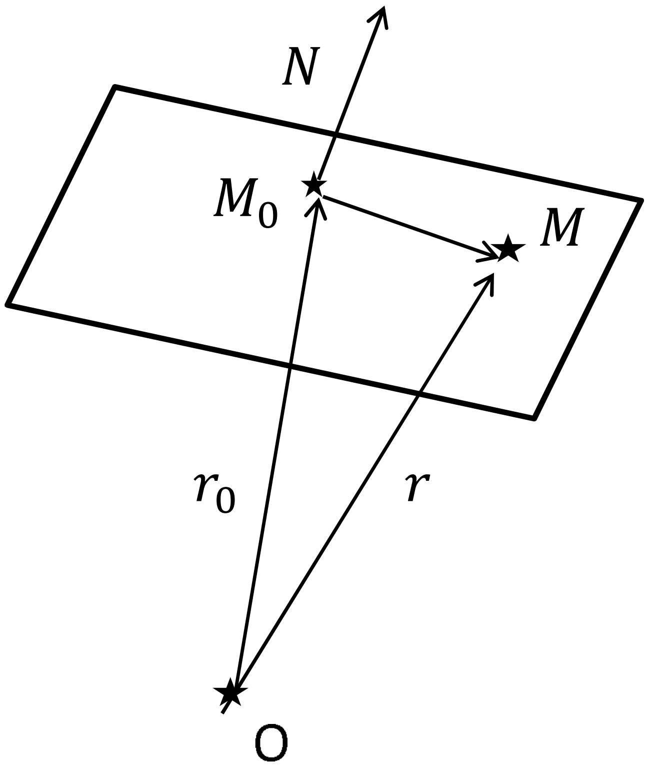

Рис. 14: Плоскость в трехмерном пространстве задается фиксированной точкой M_0 и фиксированной нормалью N

Выписывая это соотношение по координатам, имеем:

$$x - x_0 = t_1 p_1 + t_2 q_1, \quad y - y_0 = t_1 p_2 + t_2 q_2, \quad z - z_0 = t_1 p_3 + t_2 q_3, \tag{33}$$

это *параметрическое уравнение плоскости*. Когда параметры t_1, t_2 пробегают значения в пределах $(-\infty, \infty)$, точка M, соответсвующая вектору $\mathbf{r}$, пробегает всю плоскость.

Если заданы три точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, через них можно провести плоскость. Выпишем уравнение этой плоскости. Покажем, что его можно записать в вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

В самом деле, если написать разложение этого определителя по первой строке, мы получим уравнение вида (31), т.е. уравнение плоскости. Осталось проверить, что исходные точки удовлетворяют этому уравнению. Подставляя, например, вместо x, y, z значения x_0, y_0, z_0, получим нулевую строку определителя, так что он равен нулю. Следовательно, точка M_0 удовлетворяет уравнению (34). Аналогично проверяется и для двух других точек.

Угол между плоскостями можно определить, вычисляя угол между нормалями к плоскостям,

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1| \cdot |\mathbf{N}_2|}.$$

Далее, расстояние от заданной точки $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ до плоскости (31) вычисляется согласно формуле

$$L = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{35}$$

Пример. Найдем угол между плоскостью $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и плоскостью yz. Для первой плоскости нормаль к ней имеет вид $\mathbf{N}_1 = (1,\, -1,\, \sqrt{2})^T$, для второй $\mathbf{N}_2 = (1,\, 0,\, 0)^T$. Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям,

$$\cos\phi = \frac{(\mathbf{N}_1,\, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1| \cdot |\mathbf{N}_2|} = \frac{1}{2},$$

так что $\phi = \pi/3$.

Контрольный вопрос. Как построить нормаль к плоскости, заданной уравнениями (33)?

Решение типовых задач.

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathbf{A}$(4,-2,1) и $\mathbf{B}$(2,4,-3) и начало координат.

Решение. Для построения уравнения плоскости воспользуемся формулой (34), учитывая, что третья точка $\mathbf{O}$(0,0,0) :

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-(-2) & z-1 \\ 2-4 & 4-(-2) & (-3)-1 \\ 0-4 & 0-(-2) & 0-1 \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления определителя и приведения подобных слагаемых, получим

$$(x-4) + 7(y+2) + 10(z-1) = 0$$

или, окончательно

$$x + 7y + 10z = 0.$$

Задача 2. Составить общее уравнение плоскости, параллельной векторам $\mathbf{a}$(-5,6,4), $\mathbf{b}$(2,-1,0) и проходящей через точку $\mathbf{A}$(2,3,-5).

Решение. Нормалью к искомой плоскости является вектор $\mathbf{c}= [\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Найдем это векторное произведение:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a},\, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = (-4, 8, -7)^T$$

Тогда, согласно (31), запишем общее уравнение плоскости

$$-4x + 8y - 7z + D = 0,$$

где $\mathbf{D}$ найдем, подставив в уравнение координаты точки $\mathbf{A}$(2,3,-5): $-4\cdot 2 + 8\cdot 3 - 7\cdot(-5) + D = 0$, откуда имеем $D = -51$.

Теперь, домножив уравнение на (-1), окончательно получим

$$4x - 8y + 7z + 51 = 0.$$

Задачи.

1. Найти расстояние от точки $(7, 5, 0)$ до плоскости $4x - 3y - 12z + 26 = 0$.

2. Вычислить расстояние между плоскостями $2x+10y-11z-15=0$ и $2x+10y-11z+45=0$.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M=(1,4,-3)$ и параллельной плоскости $-5x-4y-3z-2=0$.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(4,1,-3)$, $(5,-2,-2)$, $(7,5,-4)$.

4. Найти угол между плоскостями $-2x-6y+7z-2=0$ и $-6x-7y-2z+3=0$.

5. Написать уравнение плоскости проходящей через точку $M(3,2,4)$ и отсекающей на осях координат отрезки равной длины.

6. На оси найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $4x-3y+z-2=0$ и $5z+y+8=0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось OX параллельно вектору $P=(1,-2,3)^T$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и образующей с плоскостью $2x+y-11z/2-7=0$ угол 60 градусов.

9. Написать уравнение плоскости. проходящей через точки $(1,2,0)$ и $N(2,1,1)$ перпендикулярно плоскости $-x+y-1=0$.

10. Вычислить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $5x+y-3z-15=0$.

5.4 Прямая в трехмерном пространстве

Фиксировать прямую в трехмерном пространстве можно, задавая точку M_0, через которую проходит прямая, и направляющий вектор прямой $\mathbf{a}$. Пусть точке M_0 соответствует вектор $\mathbf{r}_0$, текущей точке прямой M соответствует вектор $\mathbf{r}$, тогда вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}=(a_1,\,a_2,\,a_3)^T$ отличаются только множителем,

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\mathbf{a}t. \tag{36}$$

Это уравнение называется *векторным уравнением прямой*, см. рис. 15. Когда параметр t пробегает значения от $-\infty$ до ∞, точка M пробегает прямую. Записывая это уравнение в

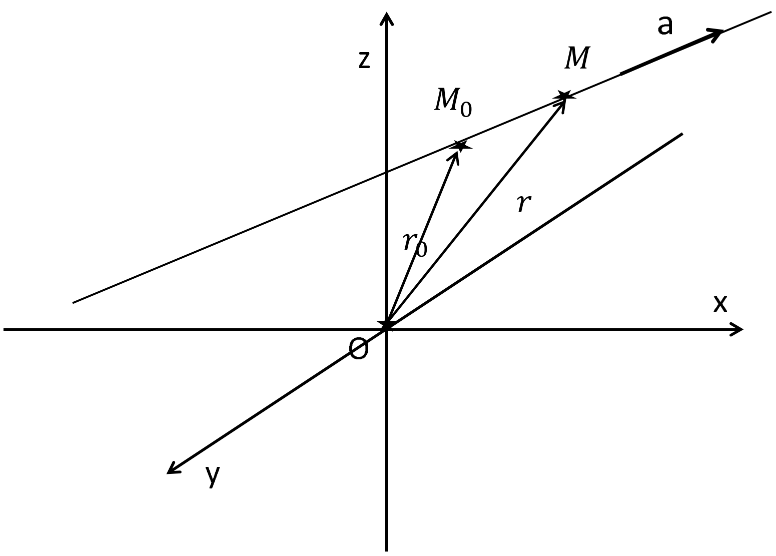

Рис. 15: Прямая в трехмерном пространстве задается фиксированной точкой M_0 и направляющим вектором $\mathbf{a}$

координатах, получаем:

$$x - x_0 = a_1 t, \quad y - y_0 = a_2 t, \quad z - z_0 = a_3 t.$$

Этот набор уравнений называется *параметрическим описанием прямой в трехмерном пространстве.* Исключая t из этих уравнений, находим:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{37}$$

Эти уравнения называются *координатными уравнениями прямой.* Заметим, что по знаменателям в этом соотношении можно восстановить вектор $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)^T$.

Выпишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, $M_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$, $M_1 = (x_1,\, y_1,\, z_1)$. Подставляя вторую точку в уравнение (37) и затем разделив (37) на результат подстановки, получим искомое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{38}$$

Далее, в трехмерном пространстве прямую можно представить как результат пересечения двух плоскостей, т.е. как результат совместного решения уравнений

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \tag{39}$$

Заметим, что уравнения прямой (37), (38) можно трактовать как уравнения вида (39).

Пример. Проведем через точку $(2,\, -5,\, 3)$ прямую, параллельную прямой

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z + 3}{9}.$$

Так как прямые параллельны, у них совпадают направляющие вектора, так что искомая прямая

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 5}{-6} = \frac{z - 3}{9}.$$

Контрольный вопрос. Как перейти от соотношений (38) к соотношениям (37)? Т.е. как найти из соотношений (38) точку M_0 и направляющий вектор $\mathbf{a}$?

Решение типовых задач.

Задача 1. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $(1, 2, 3)$ и $(2, 0, 1)$.

Решение. Согласно формуле (38) имеем

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{z - 3}{1 - 3}$$

или

$$x - 1 = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 3}{-2}.$$

Задача 2. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $\mathbf{A}(5, 3, 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z + 7 = 0$.

Решение. Поскольку искомая прямая перпендикулярна заданной плоскости, то направляющий вектор прямой совпадает с вектором нормали к плоскости.

Нормалью к плоскости $2x + 3y - z + 7 = 0$ является вектор $\mathbf{n}(2, 3, -1)$.

Тогда, согласно (37), получим каноническое уравнение нашей прямой:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Задачи.

1. Вывести формулу для расстояния между заданной точкой и заданной прямой.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $(-2, 5, -3)$ и $(-1, 3, -5)$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 4, -2)$ и перпендикулярной плоскости $5x + 4y + 3z - 11 = 0$.

4. Вычислить углы четырехугольника $A(4, 0, 8)$, $B(5, 2, 6)$, $C(3, 1, 4)$, $D(2, -1, 6)$.

5. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(2, -4, -3)$ на плоскость $3x - 7y + 5z + 3 = 0$.

6. Показать, что прямая $x - 1 = y/3 = z - 1$ лежит в плоскости $x - 2y + 5z = 6$.

7. Найти расстояние от точки $(7, 9, 7)$ до прямой $(x - 2)/4 = (y - 1)/3 = z/2$.

8. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 0, -3)$ параллельно прямой $(x - 1)/5 = (y + 2)/2 = -z - 1$.

9. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2},$$

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

10. Найти расстояние между двумя непересекающимися прямыми

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1},$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

5.5 Взаимное расположение прямой и плоскости в трехмерном пространстве

Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в трехмерном пространстве? Из простых геометрических соображений следует, что возможны следующие варианты.

1. Прямая пересекает плоскость в одной точке.

2. Прямая параллельна плоскости, и значит точек пересечения нет.

3. Прямая лежит на плоскости.

Как узнать, какой из вариантов реализуется, если заданы уравнения прямой и плоскости?

Пусть прямая задана как результат пересечения двух плоскостей,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

плоскость задана общим уравнением

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Если мы объединим эти уравнения в одну систему (линейную!) относительно переменных x, y, z, то полученную систему уравнений можно понимать как систему уравнений для точек пересечения прямой и плоскости. Пусть K - матрица коэффициентов этой системы уравнений, $\widehat{K}$ - расширенная матрица системы. Вычислим ранги этих матриц, $n = rank(K)$, $\widehat{n} = rank(\widehat{K})$. Если $n \neq \widehat{n}$, то, согласно теореме Кронекера-Капелли из курса линейной алгебры, система уравнений решений не имеет - прямая и плоскость не пересекаются, они параллельны. Если же $n = \widehat{n}$, то система уравнений совместна по той же теореме. При этом если $n = 3$, имеется только одно решение системы уравнений - прямая и плоскость пересекаются в одной точке. Если $n = 2$, то согласно общим теоремам линейной алгебры, система уравнений имеет решения, параметризованные одним свободным параметром, т.е. прямая лежит на плоскости.

Контрольный вопрос. Почему (с точки зрения линейной алгебры) нет других вариантов?

Решение типовых задач.

Задача 1. Пирамида **SABC** задана вершинами **S**(4,2,6), **A**(4,1,-2), **B**(2,0,0), **C**(-2,3,-5). Найти уравнение плоскости, на которой лежит грань **ABC**; уравнение высоты, опущенной из вершины **S** на грань **ABC**, ее длину, а также точку пересечения этой прямой с плоскостью **ABC**.

Решение.

Уравнение плоскости построим согласно формуле (34):

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-(-2) \\ 2-4 & 0-1 & 0-(-2) \\ -2-4 & 3-1 & -5-(-2) \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления определителя и приведения подобных слагаемых, получим

$$x + 18y + 10z + 2 = 0.$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины **S** на грань **ABC**, есть уравнение прямой, перпендикулярной найденной плоскости и проходящей через точку **S**.

Нормаль к плоскости является направляющим вектором прямой, следовательно, высота определяется вектором **n**(1,18,10) и точкой **S**(4,2,6). Теперь можем записать каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{18} = \frac{z-6}{10}.$$

Длина высоты соответствует расстоянию от заданной точки до плоскости и вычисляется по формуле

$$p = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 4 + 18 \cdot 2 + 10 \cdot 6 + 2|}{\sqrt{1^2 + 18^2 + 10^2}} = \frac{102}{\sqrt{425}} = \frac{6\sqrt{17}}{5}.$$

Наконец, чтобы найти точку пересечения прямой $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{18} = \frac{z-6}{10}$ и плоскости $x + 18y + 10z + 2 = 0$, запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$x - 4 = t, y - 2 = 18t, z - 6 = 10t$$

или

$$x = t + 4, y = 18t + 2, z = 10t + 6$$

Подставив эти выражения в уравнение плоскости, найдем значение параметра t:

$$11 \cdot (t + 4) + 18 \cdot (18t + 2) + 10 \cdot (10t + 6) + 2 = 0.$$

Отсюда $t = -\frac{6}{25} = -0.24$. Теперь подставив этот значение в параметрическое уравнение прямой, найдем искомые координаты:

$$x = -0.24 + 4, y = 18 \cdot -0.24 + 2, z = 10 \cdot -0.24 + 6$$

или $(3.76, -2.32, 3.6)$.

Задачи.

1. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$$

и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

2. Дан тетраэдр $A(-1, 2, 5)$, $B(0, -4, 5)$, $C(-3, 2, 1)$, $D(1, 2, 4)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной стороне BC.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 4, 4)$ и прямую $4x - 3y + 5z + 6 = 0, 2x + y - z - 2 = 0$.

4. Проверить, лежит ли прямая $(x+2)/3 = (y-5)/4 = z$ на плоскости $3x-2y-z+15 = 0$.

5. Через прямую $3x + 2y + z + 1 = 0, x + 2y + 5z + 3 = 0$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x - 2y + z + 7 = 0$.

6. Найти угол между плоскостью $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ и прямой $x + y + z + 1 = 0, 2x + y + 3z + 2 = 0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось OZ параллельно вектору $P = (1, -2, 3)^T$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$$

и параллельной прямой

$$\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

9. Проверить, лежит ли прямая

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

на плоскости $4x + 3y - z + 3 = 0$.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 4, 4)$ и прямую $4x-3y+5z+6 = 0$, $2x + y - z - 2 = 0$.

11. Даны координаты вершин пирамиды $A(3, 5, 4)$, $B(8, 7, 4)$, $C(5, 10, 4)$, $D(4, 7, 8)$. Написать уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

12. Даны точки $A(4, -5, 2)$ и $B(-2, 3, 2)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему.

13. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1 = 0$ и $x+5y-z+2 = 0$ провести плоскость,

а) проходящую через начало координат;

б) параллельную оси y.

6 Поверхности в трехмерном пространстве

6.1 Поверхности вращения

Если мы возьмем какую-нибудь линию в трехмерном пространстве и начнем вращать ее вокруг какой-нибудь оси, линия заметет поверхность. Такие поверхности называются поверхностями вращения. Рассмотрим, например, линию $\varphi(x, z) = 0$ в плоскости (x, z), и начнем ее вращать вокруг оси z. Выпишем уравнение такой поверхности (см. рис. 16). При вращении точки вокруг оси z сохраняется ее расстояние до оси z, равное для начальной точки x. Таким образом, это расстояние становится радиусом окружности, по которой движется точка. Обозначим этот радиус r. В плоскости $(x,\, y)$ этот радиус равен $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, уравнение поверхности вращения, возникающей в этом процессе, записывается в виде

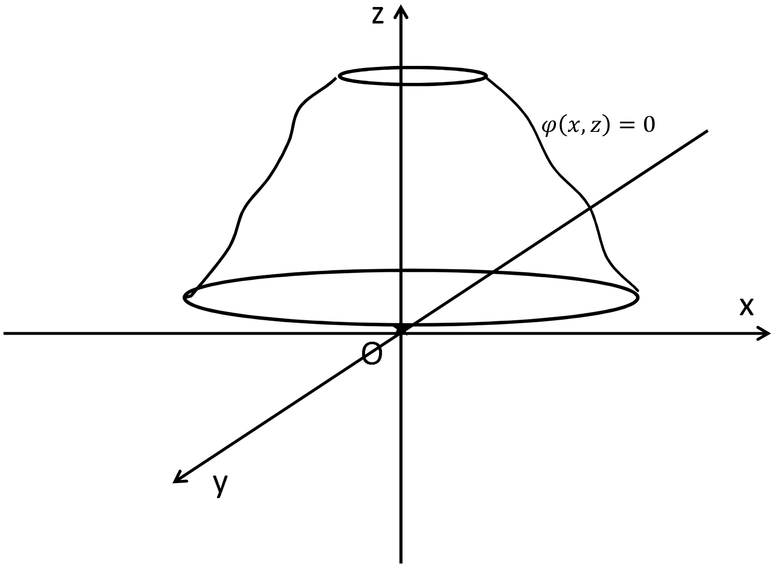

Рис. 16: Линию $\varphi(x, z) = 0$ в трехмерном пространстве вращается вокруг оси z и образует двумерную поверхность вращения

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{40}$$

Аналогичным образом можно построить уравнения поверхностей, возникающих при вращении кривых вокруг других осей.

Пример. Рассмотрим кривую в плоскости (x, z), заданную уравнением $x^2 + z^2 - 1 = 0$. Это окружность радиуса 1. При вращении ее вокруг оси z получаем сферу, уравнение для которой получается в результате замены $x \to \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя, получаем уравнение единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Контрольный вопрос. Выпишите уравнение поверхностей, возникающих при вращении кривых вокруг осей x, y.

6.2 Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве

6.2.1 Эллипсоиды

Выпишем эллипсоид вращения - поверхность, которая получается в результате вращения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг оси z. Соответствующее уравнение, в соответствии с (40), получается заменой $x \to \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{41}$$

В зависимости от соотношения величин a, c мы получаем несколько разный вид поверхности. При $a > c$ поверхность называется сжатый эллипсоид вращения, при $a < c$ - вытянутый эллипсоид вращения, см. рис.17 и рис. 18. Если растянуть координату y, то мы

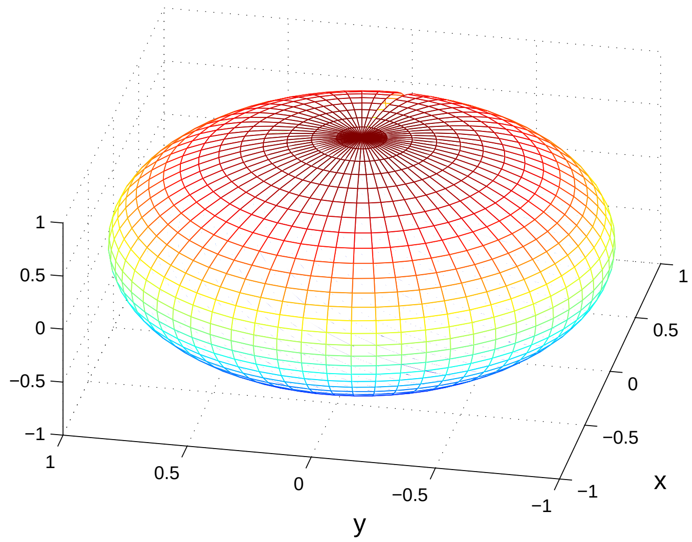

Рис. 17: Сжатый эллипсоид вращения

получим уравнение общего эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{42}$$

Если ввести сечение поверхности плоскостью, параллельной оси z (т.е. зафиксировать значение $z = z_0$ в уравнении), то для эллипсоидов вращения мы получим окружность (при $|z_0| < c$)

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right).$$

Для общего эллипсоида в сечении мы получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}$$

(если $|z_0| < c$; при $|z_0| = c$ сечение вырождается в точку, при $|z_0| > c$ плоскость и эллипсоид не пересекаются).

Задачи.

1. Написать параметрическое описание эллипсоида.

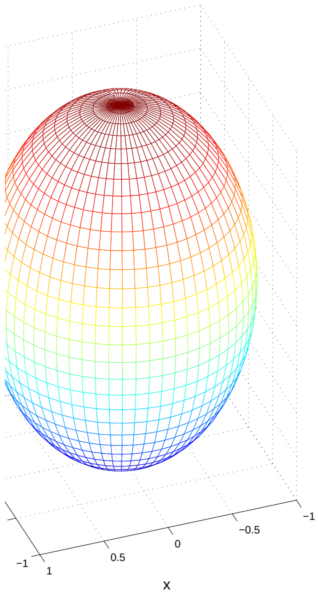

Рис. 18: Вытянутый эллипсоид вращения

6.2.2 Гиперболоиды

Выпишем уравнение гиперболы в координатах (x, z) в виде

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

и рассмотрим результат вращения этой кривой вокруг оси z. В этом случае получим уравнение однополостного гиперболоида вращения (см. рис. 20):

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1,$$

Эта неограниченная поверхность является связной (т.е. такой, что из фиксированной точки можно достичь любой другой, не покидая поверхность). Ее сечения плоскостями $x = const$, $y = const$ представляют собой гиперболы, а сечения плоскостью $z = const$ являются окружностями.

Иная поверхность получится, если мы рассмотрим результат вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

вокруг оси z, соответствующая поверхность называется двуполостным гиперболоидом вращения. Выпишем ее уравнение:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Это также неограниченная поверхность, однако она состоит "из двух кусков см. рис. 19. Ее

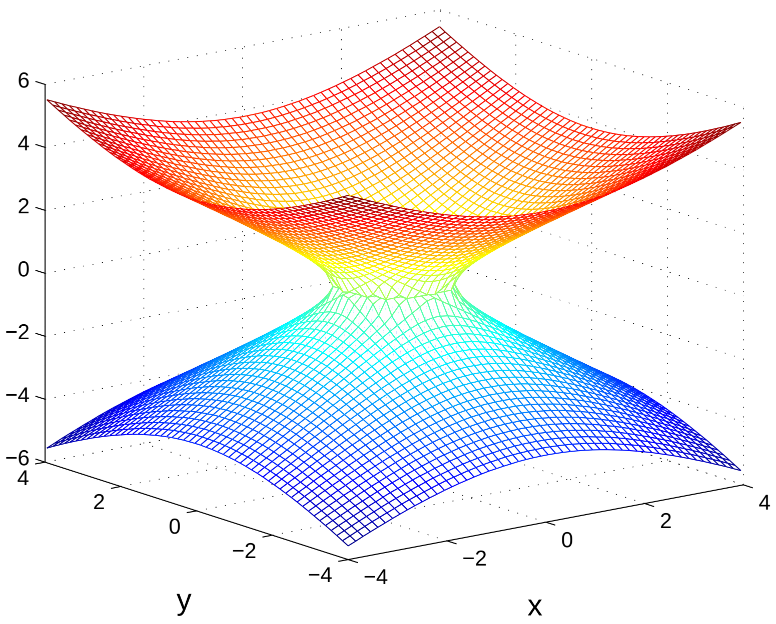

Рис. 19: Однополостный гиперболоид вращения

сечения плоскостями $x = const$, $y = const$ представляют собой гиперболы, а сечения плоскостью $z = const$ (при тех значения $const$, при которых сечения существуют) являются окружностями.

Предельным случаем гиперболоида является круговой конус - результат вращения вокруг оси z пары прямых

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

см. рис. 21. Уравнение этой поверхности получается в результате стандартной процедуры,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Сечения этой поверхности плоскостями $x = const \neq 0$, $y = const \neq 0$, - гиперболы, сечения плоскостями $z = const \neq 0$ - окружности. Сечения плоскостями $x = 0$, $y = 0$ - пары пересекающихся прямых, плоскостью $z = 0$ - точка.

Разумеется, с помощью растяжений координат можно поверхности вращения превратить в более общие, которые мы здесь обсуждать не будем.

Задачи.

1. Написать параметрическое описание кругового конуса.

6.2.3 Параболоиды

Если мы рассмотрим результат вращения параболы $x^2 = 2pz$ вокруг оси z, то получим параболоид вращения (см. рис. 22)

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

Растягивая оси x и y, получим эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

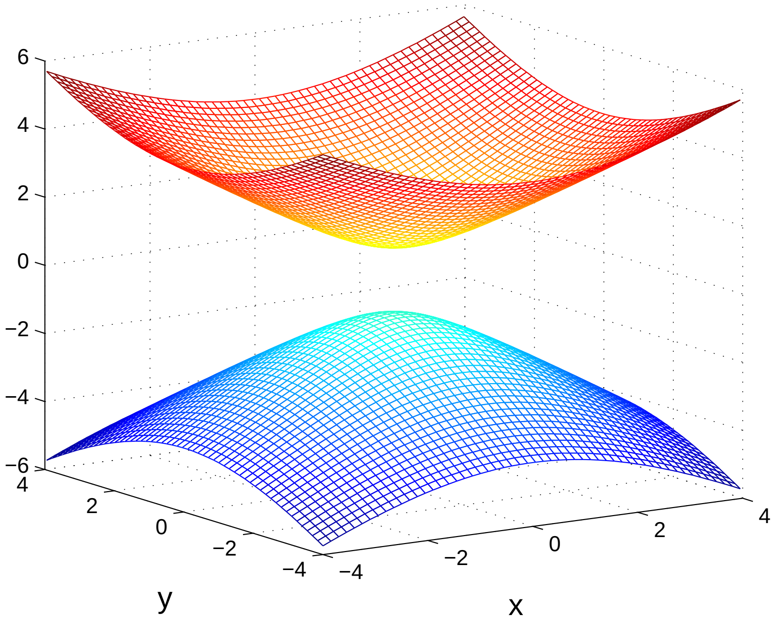

Рис. 20: Двуполостный гиперболоид вращения

Сечения этой поверхности плоскостями $x = const$, $y = const$ представляют собой параболы, сечения плоскостями $z = const > 0$ - эллипсы.

Если в последнем уравнении поменять знак у второго слагаемого, получим гиперболический параболоид (см. рис. 23)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

Эту поверхность используют для описания так называемых "седловых"точек. Ее сечения плоскостями $x = const$, $y = const$ - параболы, сечения плоскостями $z = const \neq 0$ - гиперболы, плоскостью $z = 0$ - пара пересекающихся прямых.

Задачи.

1. Найти точки пересечения поверхности

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

с прямой

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}.$$

2. Найти прямые, проходящие через точку $(6, 2, 8)$ и лежащие целиком на поверхности

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

3. Через точку $(5, 1, 2)$ провести прямую так, чтобы она пересекла поверхность

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1.$$

только один раз.

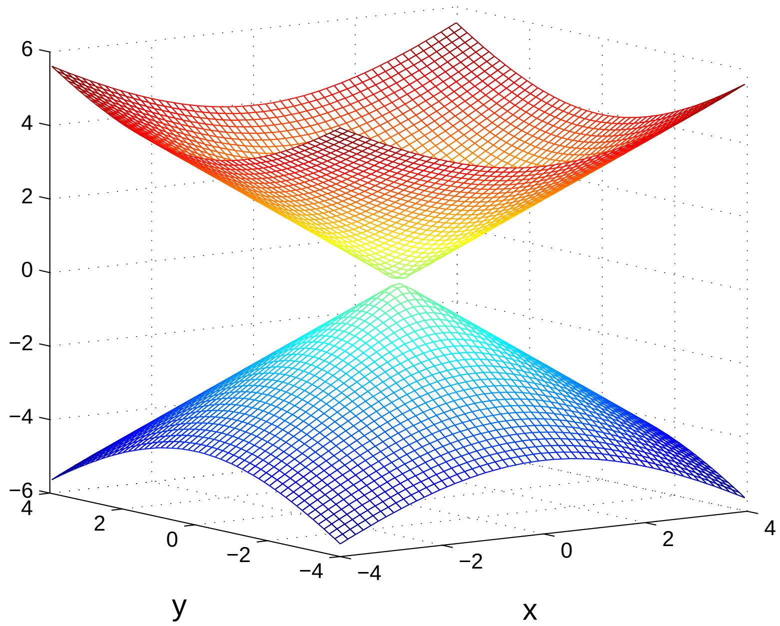

Рис. 21: Круговой конус

4. Вычислить длину диаметра поверхности

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$$

проходящего через точку $(4, -8/9, 8/3)$.

5. Через точку $(2, 1, -1)$ провести такую хорду поверхности

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1,$$

которая делилась бы в этой точке пополам.

6. Найти прямые, проходящие через начало координат и целиком лежащие на поверхности $y^2 + 3xy + 2yz - zx + 3x + 2y = 0$.

7. Привести к простейшему виду поверхность $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$.

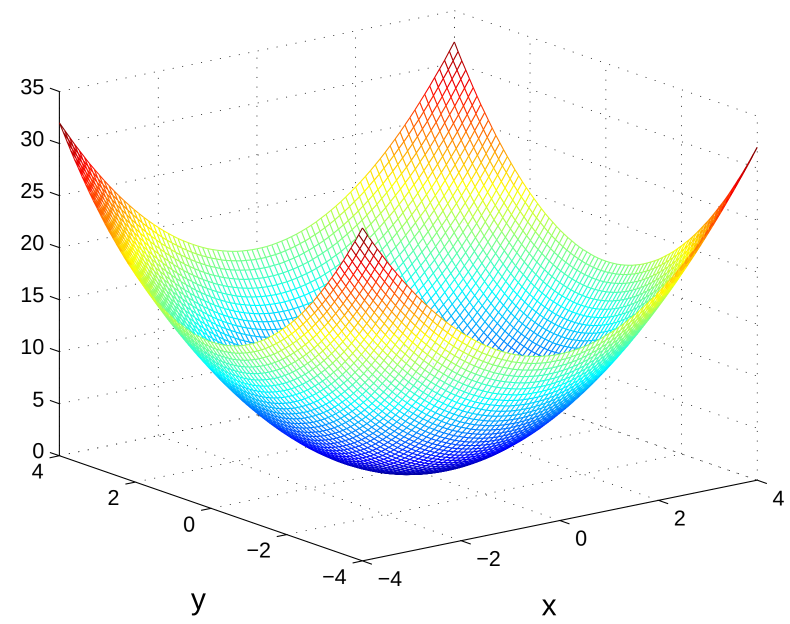

Рис. 22: Параболоид вращения

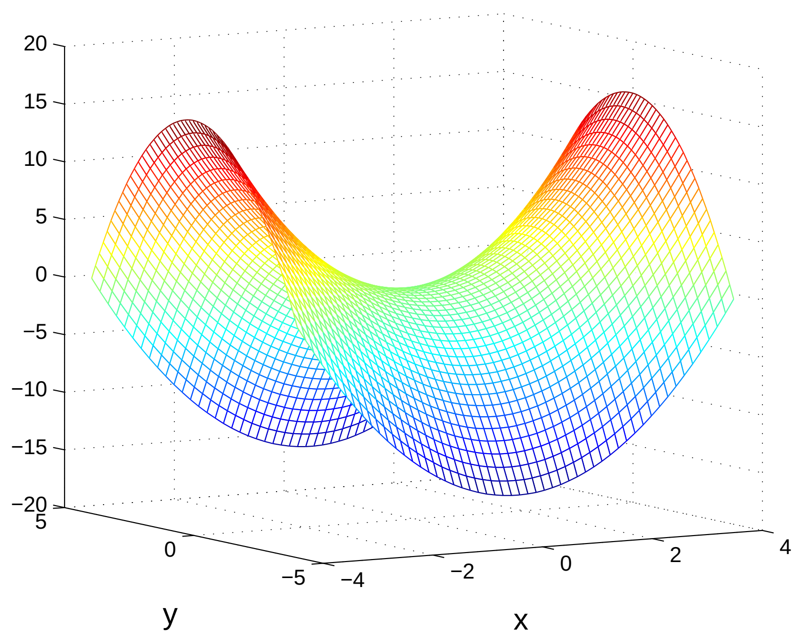

Рис. 23: Гиперболический параболоид